

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 18 marzo 1923.

F. D'OVIDIO, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Astronomia. — *Di una nuova formola per determinare la grandezza fotografica delle stelle.* Nota del Corrisp. A. BEMPORAD.

Per le ricerche intorno alla costituzione dell'universo stellato la determinazione della luminosità o, come dicono gli astronomi, della *grandezza* delle stelle⁽¹⁾, non ha minore importanza della conoscenza della loro posizione o del moto proprio o del tipo spettrale.

Avendo assunto di recente, dalle mani del collega troppo dolorosamente e prematuramente scomparso⁽²⁾, il lavoro di riduzione di una parte delle lastre del Catalogo fotografico di Catania, che dovranno fornire la posizione esatta di circa 100000 stelle fino alla 11^a grandezza, ho dovuto propormi fra l'altro la questione del modo più conveniente di determinare dalle misure dei diametri delle immagini stellari le grandezze *fotografiche* corrispondenti. Tale

(1) La grandezza stellare viene definita come una funzione logaritmica della intensità luminosa delle stelle e precisamente si pone $G = 1 - \frac{\log i}{0.4}$, intendendo che l'unità di misura per i sia l'intensità luminosa di una stella tipica di 1^a grandezza, come sarebbe, con buona approssimazione, α Aquilae.

(2) Il prof. Bortolo Viaro, fortissima tempra di lavoratore, autore del miglior Catalogo di osservazioni meridiane che l'Italia possedeva dopo quelli celebri del Piazzi e del Santini, periva a Catania di morbo violento, dopo un mese appena di direzione, a 52 anni, il 30 agosto 1922.

questione era già stata studiata a Catania, prima con appositi esperimenti fotometrici dal prof. Riccò⁽¹⁾, poi per via di calcolo dallo scrivente⁽²⁾. Poichè allora (si parla di 18 anni fa) non si possedevano cataloghi estesi di grandezze fotografiche, era necessario fondarsi sui cataloghi di grandezze visuali (Bonner Durchmusterung) o sui cataloghi fotometrici (Harvard Photometry, Potsdamer Durchmusterung), ponendo particolare attenzione ad escludere le stelle fortemente colorate, cioè rossastre, la cui grandezza fotografica devia sistematicamente dalla grandezza visuale. Oggi invece possediamo nel Draper Catalogue⁽³⁾ una miniera preziosa che fornisce, fra molti altri dati, anche le grandezze fotografiche di tutte le stelle sino alla 9^a grandezza visuale e talvolta anche oltre. Il Draper Catalogue costituisce dunque oggi il fondamento migliore per la deduzione delle grandezze fotografiche da lastre che, come quello di Catania, contengano, oltre alle stelle del « Draper » anche stelle più deboli sino alla 11^a o 12^a grandezza e sorge allora il problema di trovare la formola più conveniente e il procedimento più rapido per esprimere la relazione fra le grandezze fotografiche desunte dal detto catalogo e i diametri stellari misurati sulle lastre.

Dai calcoli di saggio da me eseguiti a Catania su 35 lastre risultava che fra tutte le formole proposte da vari autori per esprimere la relazione fra i diametri D delle immagini fotografiche e le grandezze stellari G , la formola lineare $G = a - bD$ (proposta dallo Scheiner) era quella che meglio si adattava, almeno in un limitato intervallo e cioè dalla 7^a alla 11^a grandezza. Non si mancava tuttavia di osservare (loc. cit., pag. 57) che molte lastre accusavano dopo la 9^a grandezza una decisa inflessione, verso il basso, della curva rappresentativa dei diametri in funzione delle grandezze, mentre le tre formole di Christie, di Kapteyn e di Charlier (rispettivamente di tipo parabolico, iperbolico e logaritmico) darebbero una curva sempre convessa rispetto ai due assi. La detta inflessione era già stata notata dal Loevy⁽⁴⁾, la stessa risulta infine dalle nuove misure e riduzioni eseguite dallo scrivente su altre lastre, in base alle grandezze fotografiche del Draper Catalogue. Non si può più dubitare dunque della realtà del fenomeno e ne viene di conseguenza che nessuna delle formole fin qui usate si può adattare a rappresentare la relazione fra i diametri e le grandezze in tutto l'intervallo di oltre 10 grandezze che può essere abbracciato da una lastra. La formola qui proposta risponde invece alla detta condizione, per lo meno in un intervallo di 7 grandezze, come risulterà dagli esempi che passiamo ad esporre.

(1) A. Riccò, *Lavoro della stazione internazionale nell'Osservatorio di Catania per la carta fotografica del cielo*. Rendic. della R. Acc. dei Lincei, vol. X (1901), e volume XII (1903).

(2) Cfr. Mem. della Soc. degli Spettrosc. Ital., vol. XXXIV, 1905, pag. 53.

(3) Annals of the Observatory of Harvard College, vol. 91 e seguenti.

(4) C. R., t. CXXXIV, pag. 381.

Nella seguente breve tabella riportiamo separatamente per le tre lastre n. 200, n. 1321, n. 1987:

- a) la misura del diametro stellare D in una scala arbitraria, connessa col micrometro impiegato per le misure delle coordinate rettilinee x, y ;
 b) la grandezza stellare fotografica G desunta dal Draper Catalogue;
 c) il numero di stelle da cui sono dedotti i predetti valori medi di D e di G.

| Lastra n. 200 | | | Lastra n. 1321 | | | Lastra n. 1987 | | |
|---------------|------|---|----------------|-------|---|----------------|-------|---|
| D | G | N | D | G | N | D | G | N |
| 54 | 6.55 | 4 | 35 | 5.75 | 1 | 85 | 3.26 | 1 |
| 36.5 | 7.71 | 4 | 27.5 | 7.25 | 2 | 31 | 8.57 | 4 |
| 30.8 | 8.32 | 4 | 24 | 8.15 | 4 | 27.3 | 8.97 | 3 |
| 27 | 9.17 | 4 | 23.2 | 8.71 | 4 | 24 | 9.50 | 3 |
| 22 | 9.70 | 1 | 20.7 | 9.37 | 6 | 18 | 10.03 | 3 |
| | | | 17.3 | 10.30 | 6 | | | |
| | | | 11.6 | 11.10 | 5 | | | |

Una curva tracciata a mano libera fra i punti rappresentativi delle coppie di valori D e G (ascisse) ha condotto a queste altre coppie di valori ausiliari.

| G | D | f^{III} | G | D | f^{III} | G | D | f^{III} |
|------|------|------------------|----|------|------------------|----|------|------------------|
| 6.5 | 56 | | 6 | 33.5 | | 4 | 74 | |
| 7.0 | 44.2 | | 7 | 28.5 | | 5 | 62.8 | |
| 7.5 | 37.8 | | 8 | 25.0 | | 6 | 52 | |
| 8.0 | 33.9 | — 1.7 | 9 | 22.0 | — 1.0 | 7 | 43 | — 0.8 |
| 8.5 | 30.8 | — 0.3 | 10 | 18.5 | — 1.0 | 8 | 35.5 | — 0.9 |
| 9.0 | 28.2 | — 1.7 | 11 | 13.1 | — 1.4 | 9 | 27.9 | — 0.6 |
| 9.5 | 24.4 | — 1.9 | | | | 10 | 18.5 | — 0.7 |
| 10.0 | 15.0 | | | | | | | |

Formando le differenze dei vari ordini, si nota che le differenze terze (riportate sotto f^{III}) sono quasi costanti. Dunque la curva rappresentativa della relazione in esame è molto prossimamente una parabola cubica. Il procedimento più semplice per ottenere l'equazione di tale curva è quello di scrivere la formola d'interpolazione di Stirling arrestata al quarto termine

$$f(a + yv) = f(a) + yf'(a) + \frac{y^2}{2} f''(a) + \frac{y^3 - y}{6} f'''(a)$$

deducendo i valori di $f'(a)$, $f''(a)$, $f'''(a)$ dal quadro delle differenze per un conveniente valore di a .

Assumendo come grandezza media conveniente $a = 8^m$, ossia ponendo

$$g = G - 8^m,$$

si trovano così le formole

$$(L. 200) \quad D = 33.9 - 6.234g + 2.2g^2 - 1.86g^3$$

$$(L. 1321) \quad D = 25.0 - 3.08g + 0.25g^2 - 0.167g^3$$

$$(L. 1987) \quad D = 35.5 - 7.84g - 0.05g^2 - 0.108g^3$$

Le rappresentazioni fornite da queste tre formole pei diametri osservati sono del tutto soddisfacenti, come si può giudicare dai valori che seguono

| Lastra n. 200 | | | Lastra n. 1321 | | | | Lastra n. 1957 | | | |
|---------------|-----------|---------|----------------|-----------|---------|--|----------------|-----------|---------|--|
| Diametri | | Residui | Diametri | | Residui | | Diametri | | Residui | |
| osservati | calcolati | | osservati | calcolati | | | osservati | calcolati | | |
| 54 | 53.24 | + 0.8 | 35.0 | 35.09 | - 0.1 | | 85 | 85.59 | - 0.6 | |
| 36.5 | 35.89 | + 0.6 | 27.5 | 27.52 | 0.0 | | 31 | 31.03 | 0.0 | |
| 30.8 | 32.06 | - 1.3 | 24.0 | 24.54 | - 0.5 | | 27.3 | 27.85 | - 0.5 | |
| 27 | 26.64 | + 0.4 | 22.3 | 22.34 | 0.0 | | 24 | 23.49 | + 0.5 | |
| 22 | 20.51 | + 1.5 | 20.8 | 20.82 | 0.0 | | 18 | 18.90 | - 0.9 | |
| | | | 17.3 | 18.64 | - 1.3 | | | | | |
| | | | 11.6 | 12.88 | - 1.3 | | | | | |

Non meno soddisfacente è la rappresentazione ottenuta per le altre lastre finora esaminate:

Lastra n. 240

$$D = 42.6 - 9.22g - 1.37g^2 - 0.312g^3$$

$$\text{Residui: } -0.2 \quad +0.1 \quad -0.3 \quad -2.1 \quad +2.2$$

Lastra n. 1946

$$D = 28.0 - 5.5g + 0.4g^2 - 0.8g^3$$

$$\text{Residui: } -2.2 \quad +1.6 \quad -0.7 \quad +0.2 \quad +0.4$$

Lastra n. 1850

$$D = 31.0 - 5.85g - 0.05g^2 - 0.20g^3$$

$$\text{Residui: } -0.2 \quad +0.1 \quad +0.7 \quad -0.7 \quad +0.0$$

Lastra n. 2578

$$D = 35.6 - 7.90g + 1.35g^2 - 0.25g^3$$

$$\text{Residui: } -0.5 \quad +0.7 \quad -1.1 \quad +1.2 \quad +0.4$$

Lastra n. 1477

$$D = 30.4 - 6.35g + 1.45g^2 - 0.40g^3$$

$$\text{Residui: } -1.8 \quad +2.0 \quad -1.1 \quad -0.1 \quad -0.1 \quad +1.3$$

Per l'applicazione pratica di queste formole, cioè per convertire i diametri misurati per le singole stelle in grandezze stellari, occorre risolvere per un certo numero di valori di D un'equazione di terzo grado. A ciò si perviene naturalmente con procedimento indiretto, calcolando in modo esatto solo quattro valori di D a regolari intervalli, p. es. per $G = 8^m, 8^m.4, 8^m.8, 9^m.2$. Ottenuta con questi quattro valori la differenza terza (costante) si avranno con semplici addizioni tutti gli altri valori occorrenti, entro i limiti di grandezza abbracciati dalla lastra. Da questi, con due successive interpolazioni nel mezzo, si ricaveranno i valori di D corrispondenti a valori di G di decimo in decimo di grandezza stellare. Infine dalla tabella così formata si otterrà subito, con un qualunque procedimento d'inversione, la serie dei valori γ di G corrispondenti a dati valori di D , coll'approssimazione di $0^m.01$, più che sufficiente per lo scopo pratico che si ha in vista. Riportiamo, a titolo d'esempio, la tabella così ottenuta per la lastra 1321.

| D | γ | D | γ | D | γ | D | γ | D | γ |
|-----|----------|-----|----------|-----|----------|-----|----------|-----|----------|
| 1 | 12.50 | 11 | 11.38 | 21 | 9.32 | 31 | 6.45 | 41 | 5.00 |
| 2 | 12.41 | 12 | 11.23 | 22 | 9.00 | 32 | 6.26 | 42 | 4.89 |
| 3 | 12.31 | 13 | 11.08 | 23 | 8.67 | 33 | 6.08 | 43 | 4.79 |
| 4 | 12.21 | 14 | 10.92 | 24 | 8.33 | 34 | 5.92 | 44 | 4.69 |
| 5 | 12.11 | 15 | 10.74 | 25 | 8.00 | 35 | 5.77 | 45 | 4.59 |
| 6 | 12.00 | 16 | 10.55 | 26 | 7.68 | 36 | 5.62 | 46 | 4.50 |
| 7 | 11.89 | 17 | 10.34 | 27 | 7.39 | 37 | 5.48 | 47 | 4.41 |
| 8 | 11.77 | 18 | 10.12 | 28 | 7.12 | 38 | 5.35 | 48 | 4.32 |
| 9 | 11.65 | 19 | 9.88 | 29 | 6.88 | 39 | 5.23 | 49 | 4.24 |
| 10 | 11.52 | 20 | 9.61 | 30 | 6.66 | 40 | 5.11 | 50 | 4.16 |

È da avvertire che non per tutte le lastre si può applicare questo procedimento di riduzione che, per quanto assai semplificato mediante i vari artifici grafici e numerici posti in opera, potrebbe sembrare a ragione alquanto laborioso, quando si tratti di doverlo applicare per migliaia di lastre. Per la deduzione indipendente di una parabola cubica occorre che colle coppie di valori disponibili di D e di G si possano formare almeno quattro punti normali, per ricavarne le quattro costanti della nostra formola. Ma qualche volta si presenta il caso che la lastra contenga appena otto o dieci stelle di grandezza fotografica conosciuta e allora non si possono formare più di due punti normali. Un procedimento che abbiamo trovato molto conveniente per tali casi è quello di applicare i detti due punti normali alla determinazione delle costanti a e b della formola

$$G = a\gamma + b$$

dove γ indica la radice della equazione corrispondente ad una lastra modello (p. es. la 1321) espressa in funzione del diametro D mediante il procedi-

mento d'interpolazione sopra accennato. Naturalmente quando avremo ottenuto le equazioni corrispondenti ad un numero considerevole di lastre, potremo sostituire alla cubica della lastra modello la curva media dedotta da varie lastre, nella quale si potrà sperare che risulti attenuata l'influenza delle anomalie dipendenti dalla deformazione delle immagini per irregolarità di movimento dell'equatoriale, ovvero causate dall'agitazione atmosferica, dalla qualità della emulsione, dagli errori di misura nostri, da quelli, che certo non mancheranno, del Draper Catalogue e simili.

Perchè si possa giudicare del grado di approssimazione raggiunto colla formola cubica, in confronto a quello consentito dalle altre formole, riportiamo qui per disteso i risultati ottenuti colle varie formole per la lastra n. 1477. Si hanno per questa lastra le seguenti coppie di valori normali

| | | | | | | |
|-----------|------|------|------|------|------|-------|
| G | 6.05 | 7.40 | 8.03 | 8.37 | 9.72 | 11.20 |
| D | 49.5 | 36.7 | 29 | 28 | 21.5 | 13 |
| N. di st. | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 | 1 |

Abbiamo ridotto queste sei coppie di valori di G e D colle formole seguenti:

| | | |
|------|--------------------------|----------------------------|
| I. | Form. lineare (Scheiner) | $G = a_1 - b_1 D$ |
| II. | " parabolica (Christie) | $G = a_2 - b_2 D$ |
| III. | " iperbolica (Kapteyn) | $G = a_3 (1 + b_3 D)$ |
| IV. | " logaritmica (Charlier) | $G = a_4 - b_4 \log D$ |
| V. | " cubica | $D = a + bg + cg^2 + dg^3$ |

Impiegando per tutte queste formole, fuori che per l'ultima dove riuscirebbe troppo laborioso, il metodo dei minimi quadrati abbiamo ottenuto i seguenti valori delle costanti:

| | | | |
|---------------|---------------|----------------|---------------|
| $a_1 = 12.70$ | $a_2 = 16.58$ | $a_3 = 16.20$ | $a_4 = 22.74$ |
| $b_1 = 0.143$ | $b_2 = 1.523$ | $b_3 = 0.0333$ | $b_4 = 9.945$ |
| $a = 30.4$ | $b = -6.35$ | $c = +1.45$ | $d = -0.4$ |

e quindi i seguenti valori delle grandezze G calcolate, corrispondenti ai valori di D sopra indicati:

| GRANDEZZE CALCOLATE | | | | | |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | I | II | III | IV | V |
| | 5.62 | 5.87 | 6.12 | 5.88 | 6.16 |
| | 7.45 | 7.36 | 7.29 | 7.18 | 7.19 |
| | 8.55 | 8.38 | 8.24 | 8.20 | 8.23 |
| | 8.70 | 8.52 | 8.38 | 8.35 | 8.41 |
| | 9.63 | 9.52 | 9.44 | 9.49 | 9.76 |
| | 10.84 | 11.09 | 11.30 | 11.66 | 11.07 |
| Grandezza limite | 12.56 | 15.06 | 15.68 | 22.74 | 12.11 |

RESIDUI (v) IN CENTESIMI DI GRANDEZZA

| | | | | | |
|-------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | + 43 | + 18 | — 7 | + 17 | — 11 |
| | — 5 | + 4 | + 11 | + 22 | + 21 |
| | — 52 | — 35 | — 21 | — 17 | — 20 |
| | — 33 | — 15 | — 1 | — 2 | — 4 |
| | + 9 | + 20 | + 28 | + 23 | — 4 |
| | + 36 | + 11 | — 10 | — 46 | + 13 |
| Σv . . . | — 2 | + 3 | 0 | — 1 | — 5 |
| Σvv . . . | 0.7044 | 0.2311 | 0.1496 | 0.3711 | 0.1163 |

Abbiamo calcolato anche i valori della *grandezza limite*, ossia della grandezza che risulterebbe secondo ciascuna formola di riduzione per le stelle di diametro minimo ($D=1$). Come si vede, la sola formola cubica e la lineare forniscono valori accettabili per questa grandezza limite, essendo assolutamente da escludere che con soli cinque minuti di posa si possano fotografare stelle di 15^a, meno che mai quelle di 22^a, visto che solo coi più potenti riflettori e con pose prolungate di parecchie ore si riesce a distinguere appena un barlume delle stelle ritenute di 20^a grandezza. Solo per questo fatto dunque la formola parabolica, l'iperbolica e la logaritmica sono senz'altro da escludere. Esaminando poi le somme dei quadrati dei residui, appaiono inaccettabili, sotto questo solo aspetto, la formola lineare e la logaritmica, scadente la parabolica, tollerabile la iperbolica, migliore di tutte in ogni caso la formola cubica. Anche le altre lastre qui esaminate, e particolarmente la 1321 che contiene un maggior numero di stelle, confermano questi risultati. Nell'atto di licenziare queste pagine, possiamo aggiungere che la formola è stata applicata finora, con buoni risultati, a circa 40 lastre.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi. — *Sulle serie di funzioni.* Nota di GIUSEPPE BELARDINELLI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

In due Note precedenti ⁽¹⁾ ho studiato la serie della forma

$$(1) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n}{p_n(x)},$$

ove $p_n(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$, nel caso che i punti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$ siano su una circonferenza con centro nell'origine e raggio uno e formino su questa un aggregato denso. Ho dimostrato, in questa ipotesi e sotto certe condizioni a cui debbono soddisfare i coefficienti c_n , nella prima Nota che la circonferenza è linea singolare essenziale per la $f(x)$, nella

⁽¹⁾ Rend. Accad. dei Lincei, vol. XXXI, pp. 178 e 429.

seconda che mediante integrazione della $f(x)$ si possono ottenere funzioni monogene, nel senso di Borel, multiformi non analitiche in cui l'insieme delle determinazioni in ciascun punto non è numerabile. In questa Nota tratto della trasformazione delle serie $f(x)$ in serie della forma

$$(2) \quad \varphi(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{A_n}{x - \alpha_n} \quad (1)$$

e dimostro il teorema:

« Dato un aggregato di punti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$ denso su una
« circonferenza con centro nell'origine e raggio uno, ed una successione
« ologena di numeri $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n, \dots$ (tale cioè che $\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{c_n} = 0$),
« la serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n}{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)}$$

« rappresenta nell'area interna alla circonferenza una funzione analitica
« $\psi(x)$, nell'area esterna un'altra funzione analitica $\psi_1(x)$, e la cir-
« conferenza per $\psi(x)$ e $\psi_1(x)$ è linea singolare essenziale ».

Consideriamo una serie della forma (1) tale che $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$ si trovino su una circonferenza c di centro nell'origine 0 e raggio uno, e che $\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{c_n} = 0$. In corrispondenza ai c_n si prendano dei numeri arbi-

trari u_n positivi e minori d'uno tali però che $\sum_{n=1}^{n=\infty} u_n$ sia convergente e che

da un certo indice sia $u_n > k \sqrt[n]{c_n}$, con $k > 1$. Descriviamo per ogni α_n una circonferenza di centro α_n e raggio u_n , circonferenza che possiamo indicare con (u_n) , ed analogamente alle Note precedenti, determiniamo l'area

indicata con A, nella quale la funzione $\frac{1}{1 - \frac{x}{\alpha_n}}$ sarà sviluppabile in serie

di Goursat $\sum_{n=1}^{n=\infty} P_r \left(\frac{x}{\alpha_n} \right)$ uniformemente ed assolutamente convergente ed avrà un massimo valore assoluto M_n . Similmente facciamo per tutti i punti α_n .

(1) Cfr. S. Pincherle, *Sur les séries de fonctions*, Journal de Sciencias Mathematicas

e Astronomicas, Coimbra, 1896, pag. 139. Per le serie $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{A_n}{x - \alpha_n}$, cfr. Boll. Un. mat.

ital., 1922, pag. 70; Borel, *Leçons sur les fonctions monogènes*, Gauthier-Villars, 1917; Poincaré, Acta Societatis Fennicae, t. 12; Goursat, Bulletin des Sciences Math., 1887.

Ora si ha che:

$$|f(x)| = \left| \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n}{p_n(x)} \right| \leq \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{|c_n|}{|p_n(x)|} \leq \sum_{n=1}^{n=\infty} |c_n| M_1 M_2 \dots M_n = \\ = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{|c_n|}{u_1 u_2 \dots u_n}$$

ed essendo il $\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$ e da un certo indice in poi $u_n > k \sqrt[n]{|c_n|}$ ($k > 1$),

l'ultima serie sarà convergente, onde $f(x)$ è assolutamente ed uniformemente convergente all'interno ed all'esterno della circonferenza c di centro nella origine e raggio uno. Inoltre avendo circondato i punti α_n con cerchi (u_n)

tali che $\sum_{n=1}^{n=\infty} u_n$ sia convergente esisterà un'infinità non numerabile di raggi entro ogni angolo \odot avente il vertice in 0, raggi oltrepassanti la circonferenza c e non passanti per alcun punto α_n (raggi di convergenza di Borel) tali che su di essi la serie (1) sarà pure assolutamente ed uniformemente convergente. Dico che nelle condizioni poste per i coefficienti c_n i punti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$ sono punti singolari per la (1).

Per la dimostrazione trasformiamo queste serie (1) nelle (2); problema trattato dal prof. Pincherle, nella Nota citata, nel caso che $\lim_{n=\infty} |\alpha_n| = \infty$ e che presenta, nel caso che trattiamo, maggiori difficoltà.

Il termine generale della (1) può scriversi

$$\frac{c_n}{p_n(x)} = \frac{c_n}{p'_n(\alpha_1)(x - \alpha_1)} + \frac{c_n}{p'_n(\alpha_2)(x - \alpha_2)} + \dots + \frac{c_n}{p'_n(\alpha_n)(x - \alpha_n)}$$

e supponendo d'aver fatta questa trasformazione per ogni singolo termine della (1), si ottiene un quadro in cui questo termine generale rappresenta la linea ennesima, e si trova che:

$$(3) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{c_n}{p'_n(\alpha_1)(x - \alpha_1)} + \right. \\ \left. + \frac{c_n}{p'_n(\alpha_2)(x - \alpha_2)} + \dots + \frac{c_n}{p'_n(\alpha_n)(x - \alpha_n)} \right).$$

Formalmente si ha:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n}{p_n(x)} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{A_n}{x - \alpha_n},$$

ove

$$A_n = \frac{c_n}{p'_n(\alpha_n)} + \frac{c_{n+1}}{p'_{n+1}(\alpha_n)} + \dots + \frac{c_{n+r}}{p'_{n+r}(\alpha_n)} + \dots$$

Le serie

$$\sum_{n=p}^{n=\infty} \frac{c_n}{p'_n(\alpha_p)} \quad (p=1, 2, 3, \dots)$$

sono tutte convergenti, essendo serie della forma (1) ove alle x sono stati sostituiti punti della circonferenza che non compariscono nell'aggregato dei punti che si trovano nei denominatori, e si avrà

$$\frac{1}{|x - \alpha_p|} \frac{|c_n|}{|p'_n(\alpha_p)|} < \frac{|c_n|}{u_1 \cdot u_2 \dots u_n},$$

onde il termine generale della (3) sarà minore del termine generale della serie $\sum_{n=1}^{n=\infty} n \frac{c_n}{u_1 u_2 \dots u_n}$, convergente per le ipotesi sulla successione $|\sqrt[n]{c_n}|$ e su quella dei numeri u_n . Per modo che possiamo eseguire nel detto quadro la somma per colonne ed otteniamo una serie convergente. Se facciamo $x=0$ nel quadro, otteniamo che

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} |A_n|$$

è convergente, onde abbiamo che la serie

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{A_n}{x - \alpha_n},$$

per il teorema di Poincaré-Goursat⁽¹⁾, è assolutamente uniformemente convergente all'interno ed all'esterno della circonferenza c ed i punti α_n sono punti singolari; la trasformazione formale prima eseguita della serie (1) in (2) è anche effettiva. Possiamo quindi enunciare il teorema:

« Dato un aggregato di punti

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$$

« denso su una circonferenza di centro nell'origine e raggio uno ed un aggregato di numeri

$$c_1, c_2, c_3, \dots, c_n, \dots$$

« tale che il limite della successione $|\sqrt[n]{c_n}|$ sia uguale allo zero, la serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n}{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)}$$

« rappresenta nell'area interna al cerchio una funzione analitica $\psi(x)$, nell'area esterna un'altra funzione analitica $\psi_1(x)$ e la circonferenza è linea « singolare essenziale ».

(1) Cfr. Note citate.

Naturalmente si può estendere questo teorema supponendo che i punti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \dots$ siano distribuiti su una curva chiusa od aperta γ , e sia denso su questa, oppure supponendo che l'aggregato α_n sia distribuito su r curve chiuse. Così se è distribuito su r curve chiuse $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_r$, non intersecantesi la serie (1) definisce $r+1$ funzioni analitiche e ciascuna di queste ammette come spazio lacunare o l'interno o l'esterno della curva che si considera. Se poi i contorni $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$ non sono chiusi, ma segmenti di curve, allora la serie (1) definisce una funzione analitica regolare in tutto il piano eccetto questi segmenti che sono linee singolari per la funzione. Si potrebbero moltiplicare gli esempi, se supponiamo per esempio, che l'aggregato α_n sia costituito da tutti i numeri razionali, e che $c_n = \frac{1}{n!}$, si avrà che la serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n! (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)}$$

rappresenta due funzioni analitiche distinte regolari una al disopra e l'altra al disotto dell'asse x , l'asse x essendo per entrambe una linea singolare.

Matematica. — *Un nuovo criterio per rendere normali gli integrali abeliani.* Nota di MARIA TERESA ZAPPELLONI, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

Nella teoria classica di Riemann si definiscono come normali gli integrali abeliani di 1^a specie che hanno tutti nulli i periodi relativi ai p tagli di tipo A della superficie riemanniana, tranne uno, che si può ridurre ad una costante determinata (in generale $1, o \pi i$); e gli integrali abeliani di 2^a specie che hanno per unica singolarità un polo di 1° ordine, con residuo 1, in un punto ξ, η , e tutti nulli i p periodi relativi ai p tagli A.

Con queste definizioni, gli integrali normali di 1^a e 2^a specie relativi ad una curva

$$(1) \quad f(z, w) = 0$$

sono determinati, quando siano fissate le p retrosezioni che rendono semplicemente connessa la superficie di Riemann corrispondente.

Ma, cambiando i tagli, variano i periodi, e quindi variano gli integrali normali.

Può essere opportuno, in qualche ricerca, stabilire un criterio di normalità che non dipenda dalla scelta dei tagli.

Definiremo, a tal fine, come integrale abeliano normale di 2^a specie un integrale che abbia come unica singolarità un polo di 1° ordine, con residuo 1, in un punto assegnato ξ, η ed abbia i periodi tutti reali, o tutti immaginari puri, integrale sempre esistente e ben determinato.

Supponendo ora di cambiare i tagli sulla superficie di Riemann, avremo cicli che sono combinazioni lineari a coefficienti interi dei cicli antichi, ed i periodi nuovi saranno combinazioni lineari a coefficienti interi dei periodi antichi: nel caso nostro, saranno combinazioni lineari a coefficienti interi di quantità tutte reali, o tutte immaginarie pure, e quindi ancora periodi tutti reali o tutti immaginari puri.

Con la nuova definizione, dunque, un integrale normale di 2^a specie è determinato, indipendentemente dal modo con cui sono state eseguite le p retrosezioni.

Per ogni punto ξ, η della curva (1) si avranno così due integrali abeliani normali di 2^a specie: uno con i periodi tutti reali, ed uno con i periodi tutti immaginari puri: avendo essi lo stesso residuo 1 nel loro unico comune polo, la loro differenza sarà un integrale abeliano di 1^a specie. Questo integrale diremo *integrale normale di 1^a specie relativo al punto ξ, η* .

A questo integrale è connesso un polinomio aggiunto Φ di grado $n - 3$. La curva $\Phi = 0$ è una curva aggiunta alla (1), e ben definita, una volta che sia assegnato il punto ξ, η ; essa dovrà quindi avere proprietà caratteristiche, in relazione a quel punto, rispetto a tutte le altre curve aggiunte alla (1), d'ordine $n - 3$.

Queste proprietà appunto metteremo in luce, trattando la questione nel caso di una curva di genere p qualsiasi.

Relativamente a questa curva consideriamo un sistema di p integrali abeliani di 1^a specie, linearmente indipendenti,

$$I_l = \int \frac{\Phi_l}{f^{w_{l+1}}} dz. \quad (l = 1, 2, \dots, p).$$

Sulla $f = 0$ fissiamo un punto ξ, η ; e sia H un integrale di 2^a specie che abbia un unico polo, posto nel punto ξ, η , e con residuo 1. I suoi $2p$ periodi saranno quantità complesse $P_k = \mu_k + i \nu_k$.

Anche i p integrali I_l avranno periodi complessi $\omega_{lk} = \omega'_{lk} + i \omega''_{lk}$.

Combinando linearmente, mediante parametri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p, 1$ (dove $\lambda_k = \lambda'_k + i \lambda''_k$) i p integrali di 1^a specie con H , si ottiene un integrale H_1 di 2^a specie, che ha lo stesso polo di H , con lo stesso residuo 1.

Per definire il valore dei parametri λ in modo che i periodi di H_1 , che sono del tipo:

$$\sum_{l=1}^p \left(\lambda'_l + i \lambda''_l \right) \left(\omega'_{lk} + i \omega''_{lk} \right) + (\mu_m + i \nu_m) \quad (m = 1, 2, \dots, 2p)$$

risultino tutti reali, occorre imporre $2p$ condizioni del tipo :

$$(2) \quad \sum_k^p \left(\lambda'_k \omega''_{km} + \lambda''_k \omega'_{km} \right) = -\nu_m$$

equazioni risolubili rispetto alle λ , perchè il determinante Δ delle ω'_{ik} ed ω''_{ik} , per la indipendenza degli integrali I_i , è $\neq 0$.

Analogamente, si può fare una combinazione lineare degli stessi integrali, con parametri $q_1, q_2 \dots q_p, 1$, (dove $q_k = q'_k + i q''_k$) e si troverebbe che l'integrale H_2 che così risulta ha periodi di tutti immaginari puri se sono soddisfatte le $2p$ condizioni:

$$(2') \quad \sum_k^p \left(q'_k \omega'_{km} - q''_k \omega''_{km} \right) = -\mu_m.$$

La differenza tra H_1 ed H_2 è il nostro integrale J , normale di 1^a specie relativo al punto ξ, η :

$$(3) \quad J = \sum_k^p \left(\lambda_k - q_k \right) I_k.$$

Tra i relativi polinomi aggiunti d'ordine $n-3$ passa la relazione:

$$(3') \quad \Phi = \sum_k^p \left(\lambda_k - q_k \right) \Phi_k.$$

Ora tra questa, e le (2) e (2'), è facile eliminare le parti reali e immaginarie delle λ e delle q . Si arriva così per il polinomio Φ ad un'espressione della forma:

$$(4) \quad C \begin{vmatrix} 0 & \bar{\Phi}_1(\bar{\xi}, \bar{\eta}) & \dots & \bar{\Phi}_p(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \\ \Phi_1(z, w) \sum_k^p \left(\omega_{1,k} \omega_{1,p+k} - \omega_{1,p+k} \omega_{1,k} \right) & \dots & \sum_k^p \left(\omega_{1,k} \bar{\omega}_{p,p+k} - \omega_{1,p+k} \bar{\omega}_{p,k} \right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_p(z, w) \sum_k^p \left(\omega_{p,k} \bar{\omega}_{1,p+k} - \omega_{p,p+k} \bar{\omega}_{1,k} \right) & \dots & \sum_k^p \left(\omega_{p,k} \bar{\omega}_{p,p+k} - \omega_{p,p+k} \bar{\omega}_{p,k} \right) \end{vmatrix}$$

dove C è una costante, e le $\bar{\Phi}$ ed $\bar{\omega}$ indicano le quantità complesse coniugate delle Φ e delle ω .

Da quest'espressione del polinomio Φ si possono trarre alcune proprietà della curva aggiunta $\Phi=0$, connessa con l'integrale normale di 1^a specie relativo al punto ξ, η .

Notiamo anzitutto che il determinante che si ottiene togliendo la 1^a linea e la 1^a colonna al determinante (4) è simmetrico. Basterebbe porre, infatti, al solito, $\omega_{rs} = \omega'_{rs} + i \omega''_{rs}$ e tener conto della relazione di Riemann tra i periodi di 2 integrali di 1^a specie.

Per questa via si vede pure che il determinante simmetrico ora considerato risulta formato di elementi tutti immaginari puri; ma se nel determinante (4) dividiamo le ultime p orizzontali per i , e moltiplichiamo poi per i la 1^a verticale, il polinomio $\Phi(z, w)$ ci viene dato da un'espressione del tipo:

$$(5) \quad \Phi(z, w) = C \begin{vmatrix} 0 & \overline{\Phi}_1(\bar{\xi}, \bar{\eta}) & \overline{\Phi}_2(\bar{\xi}, \bar{\eta}) & \dots & \overline{\Phi}_p(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \\ \Phi_1(z, w) & \Omega_{1,1} & \Omega_{1,2} & \dots & \Omega_{1,p} \\ \Phi_2(z, w) & \Omega_{2,1} & \Omega_{2,2} & \dots & \Omega_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_p(z, w) & \Omega_{p,1} & \Omega_{p,2} & \dots & \Omega_{p,p} \end{vmatrix}$$

dove le Ω_{hk} sono tutte reali. Si può anche vedere che esse si possono considerare come i coefficienti di una forma quadratica definita. Basterebbe, per questo, considerare un integrale generico di 1^a specie $J = \lambda_1 I_1 + \lambda_2 I_2 + \dots + \lambda_p I_p$; applicando alle parti reali ed immaginarie dei suoi periodi $\omega_k = \omega'_k + i \omega''_k$ la disuguaglianza di Riemann e sostituendo alle ω_k i loro valori, si giunge ad una forma quadratica definita nelle λ :

$$\sum_{m,n} \sum_{k,l} \left(\omega'_{m,k} \omega''_{n,p+k} - \omega''_{m,k} \omega'_{n,p+k} \right) \lambda_m \lambda_n > 0$$

i cui coefficienti non sono che le $\Omega_{m,n}$.

Premesso tutto questo, poniamo $x_h = \Phi_h(z, w)$ e consideriamo i $\Phi_h(z, w)$ come coordinate omogenee di un punto $x(x_1, x_2, \dots, x_p)$ in uno spazio S_{p-1} a $p-1$ dimensioni. Così, ad ogni punto z, w della (1) corrisponde un punto x che, al variare di z, w , descrive una curva C d'ordine $2p-2$ in S_{p-1} (lasciando da parte il caso iperellittico).

Analogamente, ponendo $\bar{y}_h = \overline{\Phi}_h(\bar{\xi}, \bar{\eta})$, consideriamo i numeri $\overline{\Phi}_h(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ come le coordinate omogenee di un punto \bar{y} complesso coniugato di un punto y della curva C .

Con queste convenzioni, la Φ data dalla (5) si presenta come un polinomio lineare in x_1, x_2, \dots, x_p , e l'equazione $\Phi = 0$, ossia

$$(6) \quad \begin{vmatrix} 0 & \bar{y}_1 & \bar{y}_2 & \dots & \bar{y}_p \\ x_1 & \Omega_{11} & \Omega_{12} & \dots & \Omega_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_p & \Omega_{p1} & \Omega_{p2} & \dots & \Omega_{pp} \end{vmatrix} = 0$$

rappresenta, per ogni punto \bar{y} dato, un iperpiano di S_{p-1} . Essa ci esprime che i punti x, \bar{y} , sono coniugati in una polarità definita dalla iperquadrica che ha per discriminante l'aggiunto di $\| \mathcal{Q}_{hk} \|$.

La (6), che è della forma:

$$(7) \quad \sum a_{im} x_i \bar{y}_m = 0 \quad \text{dove } a_{im} = a_{mi} \text{ (reale)}$$

stabilisce nello spazio S_{p-1} una corrispondenza che fu detta dal Segre *antipolarità*. Si tratta di un'antipolarità priva di punti uniti; e ciò porta che il punto (ξ, η) della curva piana $f(z, w) = 0$ non può mai stare sulla curva aggiunta $\Phi(z, w) = 0$, che ad esso corrisponde.

In conclusione, ritornando alla curva primitiva, si può dire:

nel sistema lineare ∞^{p-1} delle curve aggiunte d'ordine $n-3$ ad una curva piana d'ordine n e genere p , o nel sistema lineare dei relativi integrali abeliani di 1^a specie, rimane determinata in modo invariante un'antipolarità, in virtù della quale ad ogni curva aggiunta od integrale corrispondono ∞^{p-2} curve aggiunte od integrali; alle ∞^{p-2} curve aggiunte passanti per un punto ξ, η della curva primitiva corrisponde la curva aggiunta che dà luogo all'integrale abeliano normale di 1^a specie annesso a quel punto.

Si può chiedere quale relazione passi tra i periodi ω, ω' di due integrali antireciproci nel senso stabilito dalla (7). Si trova che la chiesta relazione ha la forma:

$$(8) \quad \sum_{k=1}^p \left(\omega_k \bar{\omega}'_{p+k} - \omega'_k \bar{\omega}_{p+k} \right) = 0$$

analogo all'eguaglianza di Riemann. Questa relazione può facilmente interpretarsi ricorrendo alla rappresentazione geometrica introdotta dallo Scorza nello studio delle matrici di Riemann.

Abbiamo così stabilito un nuovo criterio di normalità per gli integrali abeliani. Sarebbe facile vedere che per avere un sistema di p integrali abeliani normali di 1^a specie linearmente indipendenti, occorre e basta considerare un gruppo di p punti che non appartenga a serie speciale.

Geometria. — *Sulla applicabilità proiettiva di una particolare classe di varietà iperspaziali.* — Nota di CARLO BERSANO, presentata dal Corrispondente G. FUBINI.

1. In una Nota in corso di stampa nei Rendiconti dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere ⁽¹⁾ dò le formole per il contatto del 2° e del 3° ordine tra due V_k di S_n e dimostro il seguente teorema: Siano $[x]$ e $[l]$ due V_k di S_n riferite biunivocamente in modo che a punti omologhi spettino eguali valori delle coordinate curvilinee u_r . Se gli S_2 (S_3) osculatori a curve omologhe uscenti da punti omologhi si corrispondono in una collineazione, le due V_k sono proiettivamente applicabili del 2° (del 3°) ordine.

In questa Nota darò un nuovo criterio per la applicabilità del secondo ordine di una particolare classe di varietà iperspaziali. In tutta la Nota le coordinate saranno omogenee. Una V_k luogo del punto $x^{(i)} = x^{(i)}(u_1 u_2 \dots u_k)$ ($i = 0 \dots n, n > k$) sarà chiamata $V_k[x]$. Notazioni analoghe indicheranno varietà analoghe; gli indici in alto indicheranno coordinate omogenee nell' S_n ambiente; gli indici in basso derivazioni essendo

$$x_r^{(i)} = \frac{\partial x^{(i)}}{\partial u_r}, x_{rs}^{(i)} = \frac{\partial^2 x^{(i)}}{\partial u_r \partial u_s} \text{ etc. } \dots$$

2. Con un facile calcolo dal § 3 della mia Nota citata si ricava che condizione perchè due $V_k[x]$ e $[X]$ riferite biunivocamente al modo solito abbiano un punto omologo 0 in comune, e in esso un contatto del secondo ordine, è che esista un sistema di valori delle coordinate curvilinee u_r per cui valgano le:

$$(1) \quad X^{(i)} = \lambda x^{(i)}, \quad X_r^{(i)} = \lambda(x_r^{(i)} + m_r x^{(i)}) \quad (i = 0, \dots, n; r, s = 1 \dots k)$$

$$X_{rs}^{(i)} = \lambda(x_{rs}^{(i)} + \pi_r x_s^{(i)} + \pi_s x_r^{(i)} + \tau_{rs} x^{(i)})$$

essendo

$$\lambda = \frac{x^{(0)}}{X^{(0)}}, \quad m_r = \frac{1}{x^{(0)}} x_r^{(0)} - \frac{1}{X^{(0)}} X_r^{(0)}, \quad \pi_r = m_r + \sigma_r$$

$$\tau_{rs} = x_{rs}^{(0)} \frac{1}{x^{(0)}} - X_{rs}^{(0)} \frac{1}{X^{(0)}} - \pi_r X_s^{(0)} \frac{1}{X^{(0)}} - \pi_s X_r^{(0)} \frac{1}{X^{(0)}}$$

dove σ_r sono i coefficienti che compariscono nelle formule espresse in coordinate non omogenee. Se $\pi_r = m_r$ il contatto è analitico, essendo in tal caso $\sigma_r = 0$.

⁽¹⁾ Contatti del secondo e del terzo ordine tra varietà iperspaziali. Il teorema del testo è dovuto, nel caso del secondo ordine e delle V_2 di S_3 , al dott. E. Čech. (Bull. de l'Ac. de Sciences de Bohême 1921).

3. Diremo che una V_k di S_n è della specie Φ se è soluzione di una e una sola equazione differenziale del secondo ordine a cono caratteristico non degenerare ⁽¹⁾. Siano $[x]$ e $[\eta]$ due tali varietà soddisfacenti rispettivamente alle:

$$(2) \quad \sum_{r,s} A_{rs} x_{rs}^{(i)} + \sum_p A_p x_p^{(i)} + A x^{(i)} = 0 \quad (r, s = 1 \dots k)$$

$$(3) \quad \sum_{r,s} B_{rs} \eta_{rs}^{(i)} + \sum_p B_p \eta_p^{(i)} + B \eta^{(i)} = 0. \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

Preciseremo meglio le nostre ipotesi, dicendo che esse equivalgono a supporre che siano differenti da zero i determinanti delle A_{rs} , B_{rs} e che il dare i valori delle x (o delle η) e le loro derivate prime e seconde, determini per (2) [o per (3)] completamente i valori delle A (o delle B). Le due V_k $[x]$ e $[\eta]$ siano riferite biunivocamente in modo che punti omologhi abbiano identiche coordinate curvilinee u_r . Di più le due V_k siano tali che in questa corrispondenza si corrispondano le generatrici dei coni caratteristici uscenti da due punti omologhi O e O' . Dico che *le due V_k sono proiettivamente applicabili del secondo ordine*. Mutiamo con una omografia la $V_k[x]$ in un'altra $[\xi]$ in modo che O' vada in O e le generatrici del cono caratteristico di $[\eta]$ vadano nelle loro omologhe. $[x]$ e $[\xi]$ avranno così un punto (0) in comune e in questo punto lo stesso cono caratteristico. La $V_k[\xi]$ soddisferà evidentemente alla stessa equazione differenziale cui soddisfa la $V_k[\eta]$; sarà inoltre — per la coincidenza dei due coni caratteristici — $A_{rs} = B_{rs}$. La $V_k[\xi]$ soddisferà cioè alla:

$$(4) \quad \sum_{r,s} A_{rs} \xi_{rs}^{(i)} + \sum_p B_p \xi_p^{(i)} + B \xi^{(i)} = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Determiniamo delle quantità π_r , τ_{rs} , m_p in modo che siano soddisfatte le:

$$(5) \quad A_p = 2 \sum_s A_{ps} \pi_s + B_p \quad ; \quad A = \sum_{r,s} A_{rs} \tau_{rs} + \sum_p m_p B_p + B$$

ciò che si può fare perchè il determinante delle A_{rs} è differente da zero. Sostituendo nella (2), alle A_p , A questi loro valori, si trova:

$$(6) \quad \sum_{r,s} A_{rs} \left(x_{rs}^{(i)} + \pi_r x_s^{(i)} + \pi_s x_r^{(i)} + \tau_{rs} x^{(i)} \right) + \\ + \sum_p B_p \left(x_p^{(i)} + m_p x^{(i)} \right) + B x^{(i)} = 0.$$

⁽¹⁾ Queste varietà sono la più naturale estensione delle superficie della specie Φ introdotte dal prof. C. Segre nella memoria « Su una classe di superficie degli iperspazii legate con le equazioni alle derivate parziali di 2° ordine ». Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XLII, pag. 1052. A questa classe di superficie appartengono tutte le V_2 di S_4 . Delle nostre varietà fa un cenno il prof. Segre stesso negli ultimi paragrafi della Nota citata.

Le $n + 1$ equazioni (4) per $i = 0, 1, \dots, n$, si possono considerare come un sistema di $n + 1$ equazioni omogenee nelle $\frac{1}{2}k(k+3) + 1$ incognite A_{rs}, B_r, B . I valori delle incognite che soddisfano a questo sistema e che per ipotesi esistono, debbono soddisfare anche alle (6) le quali, posto:

$$(7) \quad X_{rs}^{(i)} = \lambda \left(x_{rs}^{(i)} + \pi_s x_r^{(i)} + \pi_r x_s^{(i)} + \tau_{rs} x^{(i)} \right),$$

$$X_r^{(i)} = \lambda \left(x_r^{(i)} + m_r x^{(i)} \right), \quad X^{(i)} = \lambda x^{(i)}$$

diventano:

$$(6') \quad \sum_{r,s} A_{rs} X_{rs}^{(i)} + \sum_p B_p X_p^{(i)} + B X^{(i)} = 0.$$

Poichè per ipotesi le $A_{rs} = B_{rs}$, B_p , B sono completamente determinate da (4), dovranno esistere delle quantità a_{ih} (che potranno non essere tutte differenti da zero) tali che sia:

$$(8) \quad X_{rs}^{(i)} = \sum_h a_{ih} \xi_{rs}^{(h)}, \quad X_r^{(i)} = \sum_h a_{ih} \xi_r^{(h)}, \quad X^{(i)} = \sum_h a_{ih} \xi^{(h)}$$

Queste quantità a_{ih} sono funzioni del punto (\bar{u}_r) della $V_k[\xi]$ che si considera nel senso che ad ogni punto di $[\xi]$ viene a corrispondere una $V_k[X]$. Queste a_{ih} rimangono costanti al variare del punto sulla $V_k[X]$, cioè non mutano quando — fissato il punto in cui coincidono i con caratteristici — si cerchino i trasformati dei vari punti della $V_k[\xi]$. Ne segue che le prime due formule (8) sono proprio quelle che si ottengono derivando l'ultima, cioè la (7) esprime effettivamente la condizione di contatto del secondo ordine tra la $V_k[x]$ e la $V_k[X]$, trasformata della $[\xi]$ mediante l'omografia (8). Ricordando ora che la $V_k[\xi]$ è una trasformata collinearmente di $[\eta]$, si trae che tale sarà anche $[X]$ ciò che dimostra il nostro enunciato.

Osservando ora che le (5) legano mediante una sola equazione le quantità τ_{rs} , m_p potremo porre $m_p = \pi_p$ ottenendo che: *se due varietà della specie Φ sono geometricamente applicabili del secondo ordine rispetto al gruppo proiettivo, esse sono anche analiticamente applicabili.* Ritroviamo così un risultato che il prof. Fubini ⁽¹⁾ aveva dimostrato per le V_2 di S_3 e che io ho dimostrato nella Nota citata per V_k generiche.

4. Sia ora $[\xi]$ una V_k della specie Φ proiettivamente applicabile su una $V_k[x]$. Esisterà per ogni punto di $[\xi]$ una $V_k[X]$ luogo del punto $X^{(i)} = \sum_h a_{ih} \xi^{(h)}$ avente con $[x]$ un contatto del secondo ordine. La $V_k[X]$

(¹) G. Fubini, *Applicabilità proiettiva di due superficie*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo LXI. Vedasi al riguardo il § 5.

soddisferà alla stessa equazione differenziale della $V_k [\xi]$. Sarà cioè soddisfatta la

$$(9) \quad \sum_{r,s} A_{rs} X_{rs}^{(i)} + \sum_p B_p X_p^{(i)} + B X^{(i)} = 0 \quad (i=0, 1, \dots, n; r, s=1, \dots, k).$$

Inoltre le due $V_k [x]$ e $[X]$ sono legate dalle (1). Ne segue per la (9):

$$\sum_{r,s} A_{rs} x_{rs}^{(i)} + \sum_p \left[2 \sum_s A_{ps} x_s + B_p \right] x_p^{(i)} + \left[\sum_{r,s} A_{rs} x_{rs} + \sum_p m_p B_p + B \right] x^{(i)} = 0$$

che dimostra che anche la $V_k [x]$ è della specie Φ e che il suo cono caratteristico coincide con quello della $V_k [X]$. Cioè che tra le due $V_k [x]$ e $[\xi]$ i coni caratteristici sono formati da direzioni omologhe.

Possiamo quindi affermare che: *se due V_k di S_n sono proiettivamente applicabili del secondo ordine e una è della specie Φ , tale è anche l'altra; e anzi: condizione necessaria e sufficiente per la applicabilità è che — nella data corrispondenza biunivoca tra le due V_k — i coni caratteristici uscenti da punti omologhi siano generati da direzioni omologhe.*

5. Per le V_2 di S_4 basterà quindi la corrispondenza tra le due direzioni caratteristiche perchè se ne possa dedurre l'applicabilità. Cioè due V_2 di S_4 sono proiettivamente applicabili del secondo ordine se — in punti omologhi — le rispettive forme f_2 del prof. Fubini (1) differiscono solamente per un fattore, e viceversa.

Meccanica. — *Sopra i potenziali simmetrici che conducono alle soluzioni longitudinali delle equazioni gravitazionali di Einstein.* Nota di ATTILIO PALATINI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sono ben note le ampie classi di soluzioni delle equazioni gravitazionali di Einstein, trovate dal Levi-Civita (2), in corrispondenza a campi statici vuoti. Tra le dette soluzioni hanno speciale interesse le *soluzioni longitudinali* (3) e quelle *binarie di Weyl* (4): le prime perchè ad esse appartiene l'ormai famosa soluzione di Schwarzschild; le seconde per la loro

(1) Per la definizione proiettivo-differenziale delle V_2 di S_4 vedasi: G. Fubini, *Geometria proiettivo-differenziale delle superficie (V_2) di uno spazio (S_4) a quattro dimensioni*, Mathematische Annalen, Band 85, Seite 213.

(2) T. Levi-Civita, *ds² einsteiniani in campi newtoniani*, Note I-IX (questi Rendiconti, 1917-1919, vol. XXVI, XXVII e XXVIII).

(3) T. Levi-Civita, *Nota V* (vol. XXVII, pp. 240-248).

(4) T. Levi-Civita, *Nota VIII* (vol. XXVIII, pp. 3-13).

generalità, potendo esser poste in corrispondenza biunivoca con gli ordinari potenziali simmetrici. Queste ultime sono state denominate dal Levi-Civita stesso « soluzioni di Weyl » perchè dal Weyl erano già state trovate in precedenza, sebbene con metodi assolutamente diversi ⁽¹⁾

Nella Nota or ora citata il Weyl mostra che tra le sue soluzioni si ritrova, come caso particolare, la soluzione di Schwarzschild, la quale viene a corrispondere al potenziale newtoniano di una massa distribuita sopra un segmento.

Più generalmente si può dimostrare che tutte le soluzioni longitudinali rientrano nelle soluzioni di Weyl e precisamente in corrispondenza ai potenziali newtoniani simmetrici di masse distribuite sopra un ellissoide rotondo allungato, sopra un iperboloide rotondo a due falde e lungo una retta indefinita. Il primo degli accennati potenziali (quando la massa è positiva) va associato alla soluzione di Schwarzschild. Il potenziale ordinario di un opportuno ellissoide viene dunque a corrispondere al campo einsteiniano di un'unica massa concentrata in un punto. È bene osservare esplicitamente che il nostro risultato non è in contraddizione con quello del Weyl, perchè segmento ed ellissoide rotondo allungato hanno notoriamente egual potenziale esterno.

Si può fare un'applicazione notevole del risultato ottenuto, considerando l'analogo einsteiniano del potenziale ordinario di due ellissoidi allungati di rotazione attorno al medesimo asse. Si riesce con relativa facilità a integrare le equazioni gravitazionali statiche corrispondenti e si ottiene con ciò l'alterazione metrica einsteiniana dovuta a due masse concentrate in due punti — naturalmente in una regione sufficientemente lontana dalle masse medesime ⁽²⁾.

In questa Nota mi limito ad esaminare per sommi capi il caso di uno e due ellissoidi, riservandomi di studiare la questione in ogni dettaglio in altro lavoro.

1. Fra le soluzioni longitudinali delle equazioni gravitazionali, la più interessante è quella contenuta nelle formule

$$(1) \begin{cases} dl^2 = \frac{dR^2}{1 - \alpha/R} + R^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2); & (\alpha \text{ cost. positiva o negativa}), \\ v = \frac{1}{2} \log(1 - \alpha/R); & \omega_2 = \omega_3 = -\frac{1}{2} \omega_1 = -\alpha/2R^3, \end{cases}$$

perchè quando $\alpha > 0$, questa soluzione non è altro che quella di Schwarzschild corrispondente all'ipotesi di un'unica massa concentrata in un punto.

⁽¹⁾ H. Weil, *Zur Gravitationstheorie* (Annalen der Physik, Bd. 54, Heft 18, 1917, pp. 117-145).

⁽²⁾ In vicinanza alle due masse, in particolare nella regione compresa entro le masse medesime, non valgono le formule da noi dedotte nel testo. Intorno al problema corrispondente mi consta che si sta occupando il prof. P. Straneo, il quale quanto prima comunicherà i risultati ai quali è pervenuto.

Nelle (1), $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ rappresentano le curvature principali del dl^2 e ν è il potenziale gravitazionale dal quale dipende la velocità V della luce a norma della formula $V = V_0 e^\nu$ (V_0 costante).

Si noti esplicitamente che ν dipende da un solo parametro e che due curvature sono eguali tra loro.

2. Il quadrato dell'elemento lineare di un campo einsteiniano associato a una soluzione di Weyl ha per espressione ⁽¹⁾

$$(2) \quad dl^2 = e^{-2\lambda} [e^{2\lambda} (dr^2 + dz^2) + r^2 dx_3^2],$$

dove ν e λ sono soluzioni delle equazioni

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \nu}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \nu}{\partial r} \right) = 0; \quad \frac{\partial \lambda}{\partial r} = r \left[\left(\frac{\partial \nu}{\partial r} \right)^2 - \left(\frac{\partial \nu}{\partial z} \right)^2 \right], \quad \frac{\partial \lambda}{\partial z} = 2r \frac{\partial \nu}{\partial r} \frac{\partial \nu}{\partial z}.$$

Si tratta ora di vedere se tra le soluzioni delle (3) ve ne è una che conduca alle (1).

3. Proviamo a tal uopo ad esprimere che ν dipende da un solo parametro R e che due curvature della forma (2) sono eguali tra loro. Se si denota con α una costante e nell'ipotesi che sia $R^2 - \alpha R > 0$, si pone

$$(4) \quad r = \sqrt{R^2 - \alpha R} \sin \vartheta; \quad z = (\alpha/2 - R) \cos \vartheta, \quad x_3 = \varphi$$

e si eseguiscano le operazioni indicate, si trovano proprio le formule (1). Dunque la soluzione longitudinale presa in esame rientra come caso particolare tra le soluzioni di Weyl.

4. È interessante ora vedere a qual potenziale simmetrico ordinario essa va associata. A questo scopo si ponga ancora

$$R = \alpha/2 + \sqrt{C^2 + \tau}; \quad \alpha^2/4 = C^2 - A^2$$

(A e C costanti di cui $C > A$) e si elimini ϑ tra le (1). Si ottiene la famiglia di ellissoidi confocali

$$(5) \quad \frac{r^2}{A^2 + \tau} + \frac{z^2}{C^2 + \tau} = 1.$$

Con le stesse posizioni il potenziale ν prende la forma

$$(6) \quad \nu = \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{C^2 + \tau} - \alpha/2}{\sqrt{C^2 + \tau} + \alpha/2}.$$

Ciò premesso si ricordi ⁽²⁾ che nella teoria di relatività la funzione $-\frac{1}{2} V_0^2 e^{2\nu}$ costituisce il potenziale statico unitario di ogni campo di elemento lineare dl e che tale potenziale, in prima approssimazione, si può

⁽¹⁾ T. Levi-Civita, loc. cit., Nota VIII.

⁽²⁾ T. Levi-Civita, loc. cit., Nota I.

assumere eguale a $-c^2 v$ (c velocità della luce nello spazio euclideo). Per formule note ne segue che se nella (6) la costante α è tale per cui risulti ⁽¹⁾ $\alpha = \frac{2fM}{c^2}$ (f costante di attrazione universale), $-c^2 v$ rappresenta il potenziale ordinario di una massa M compresa tra due ellissoidi omotetici rotondi allungati infinitamente vicini. In tal caso la (5) è l'equazione dell'ellissoide confocale passante per il punto potenziato.

Dunque il campo einsteiniano di un'unica massa concentrata in un punto va associato all'ordinario potenziale newtoniano di un opportuno ellissoide rotondo allungato.

5. Prendiamo ora a considerare due ellissoidi rotondi allungati (l'asse di rotazione essendo il medesimo), le cui distanze focali siano

$$(7) \quad \alpha_1 = \frac{2fM_1}{c^2} \quad , \quad \alpha_2 = \frac{2fM_2}{c^2} .$$

L'analogo einsteiniano sarà il campo statico delle due masse M_1 ed M_2 . Vediamo di trovare l'espressione del dl^2 che gli compete. Basterà a tal uopo integrare le equazioni (3) assumendo per v l'espressione

$$(8) \quad v = \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{C_1^2 + \tau_1} - \alpha_1/2}{\sqrt{C_1^2 + \tau_1} + \alpha_1/2} \cdot \frac{\sqrt{C_2^2 + \tau_2} - \alpha_2/2}{\sqrt{C_2^2 + \tau_2} + \alpha_2/2} ,$$

dove τ_1 e τ_2 sono le soluzioni delle due equazioni

$$\frac{r^2}{A_1^2 + \tau_1} + \frac{(z-a)^2}{C_1^2 + \tau_1} = 1 \quad ; \quad \frac{r^2}{A_2^2 + \tau_2} + \frac{(z+a)^2}{C_2^2 + \tau_2} = 1 ,$$

per le quali le equazioni stesse rappresentano ellissoidi. $2a$ rappresenta evidentemente la distanza fra i centri dei due ellissoidi.

Integrando le (3) si ottiene per λ l'espressione

$$(9) \quad e^{-2\lambda} = \Phi \cdot \Psi \cdot X ,$$

dove

$$\begin{aligned} \Phi &= (C_1^2 + \tau_1) \left[\frac{r^2}{(A_1^2 + \tau_1)^2} + \frac{(z-a)^2}{(C_1^2 + \tau_1)^2} \right] ; \\ \Psi &= (C_2^2 + \tau_2) \left[\frac{r^2}{(A_2^2 + \tau_2)^2} + \frac{(z+a)^2}{(C_2^2 + \tau_2)^2} \right] ; \\ X &= \frac{1}{b} \left[\frac{(C_1^2 + \tau_1)(C_2^2 + \tau_2)}{(A_1^2 + \tau_1)(A_2^2 + \tau_2)} \left\{ \frac{\alpha_1 r}{\sqrt{C_1^2 + \tau_1}} + \frac{\alpha_2 r}{\sqrt{C_2^2 + \tau_2}} \right\}^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{\alpha_1(z-a)}{\sqrt{C_1^2 + \tau_1}} + \frac{\alpha_2(z+a)}{\sqrt{C_2^2 + \tau_2}} \right\}^2 - 16a^2 \right] . \end{aligned}$$

(1) Se α è positivo, questa è la notissima relazione che corre tra la costante α e la massa M , nel campo einsteiniano di un'unica massa concentrata in un punto.

b è una costante alla quale si può e conviene attribuire il valore

$$b = [(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 16 a^2]^2.$$

L'espressione del dl^2 è fornita dalla (2) dove per ν e λ si intendono sostituiti i loro valori (8) e (9). Per il ds^2 quadridimensionale di Einstein si ha

$$ds^2 = V^2 dt^2 - dl^2,$$

dove, come già si è detto, $V = V_0 e^\nu$. Se si esige che l'influenza delle due masse si vada attenuando all' ∞ , alla costante V_0 bisogna attribuire il valore c .

6. Se si vogliono le espressioni dei coefficienti del ds^2 in 2^a approssimazione, si ponga

$$R_1 = \frac{\alpha_1}{2} + \sqrt{C_1^2 + \tau_1} \quad ; \quad R_2 = \frac{\alpha_2}{2} + \sqrt{C_2^2 + \tau_2}$$

e si considerino $\frac{\alpha_1}{R_1}, \frac{\alpha_2}{R_2}, \frac{\alpha_1}{a}, \frac{\alpha_2}{a}$ come quantità di primo ordine⁽¹⁾. Si trova

$$V^2 = c^2 \left(1 - \frac{\alpha_1}{R_1} - \frac{\alpha_2}{R_2} + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{R_1 R_2} \right)$$

$$e^{2\lambda} = 1 - \frac{\alpha_1^2}{4R_1^2} \sin^2 \vartheta_1 - \frac{\alpha_2^2}{4R_2^2} \sin^2 \vartheta_2 - \frac{\alpha_1 \alpha_2}{2a^2} \sin^2 \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2}.$$

Se poi si trascurano anche le quantità di secondo ordine, si ha $e^{2\lambda} = 1$ e $V^2 = c^2(1 + 2\nu)$ e quindi

$$(10) \quad ds^2 = c^2(1 + 2\nu) dt^2 - (1 - 2\nu) dl_0^2,$$

con dl_0^2 euclideo. Si verifica dunque, come naturalmente doveva avvenire, un teorema generale dovuto al Levi-Civita, secondo il quale ogni ds^2 einsteiniano statico si presenta, in prima approssimazione, sotto la forma (10) ⁽²⁾.

(1) Le ragioni che inducono a trattar come molto piccole tali quantità, si deducono dall'esame del caso di un'unica massa. I parametri ϑ_1 e ϑ_2 che compariscono nelle formule seguenti sono le anomalie eccentriche del punto potenziato rispetto ai due ellissoidi potenzianti.

(2) T. Levi-Civita, loc. cit., Nota I.

Fisica matematica. — *L'integrazione dell'equazione di Laplace in un cerchio, essendo data al contorno una relazione lineare tra la funzione e la sua derivata obliqua.* Nota di ENRICO PER-SICO e BIANCA DI RENZO, presentata dal Socio VOLTERRA.

In alcune questioni di Fisica matematica (ad esempio, nello studio della propagazione del calore in una lamina immersa in un campo magnetico) si presenta il seguente problema:

determinare una funzione $u(x, y)$, armonica e regolare nell'interno di un cerchio, essendo data, al contorno, una relazione lineare fra la u e la sua derivata secondo una direzione l inclinata di un angolo costante β rispetto alla normale, o, più precisamente, una relazione del tipo

$$(1) \quad u - \lambda \frac{\partial u}{\partial l} = \varphi_0$$

essendo λ una costante e φ_0 una funzione nota dei punti del contorno.

Se tale funzione esiste, essa, nell'ipotesi di $\lambda > 0$, è unica; infatti, se esistessero due soluzioni u_1 ed u_2 , si potrebbe facilmente riconoscere, applicando la formula di Green, che la funzione armonica $v = u_1 - u_2$ è nulla in tutta l'area e quindi $u_1 = u_2$.

Passiamo quindi a dimostrare l'esistenza effettiva della soluzione ed a trovarne la espressione.

Preso dunque un cerchio, supposto per semplicità di raggio unitario, sia n la normale volta verso l'interno.

La funzione u che si tratta di determinare soddisfa nell'interno del cerchio all'equazione

$$\Delta^2 u = 0$$

cioè, in coordinate polari,

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} = 0$$

ed al contorno alla relazione (1).

Chiamiamo φ la funzione armonica che sia al contorno uguale a φ_0 ; avremo allora

$$(2) \quad u - \lambda r \frac{\partial u}{\partial l} = 0,$$

poichè tale funzione soddisfa alle due condizioni imposte per la φ .

Ponendo ora

$$\varrho = \log r$$

la condizione di armonicità per la funzione u si esprime con

$$(3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} = 0$$

e la (2) si trasforma nella

$$(4) \quad u + \lambda \frac{\partial u}{\partial \varrho} \cos \beta - \lambda \frac{\partial u}{\partial \alpha} \sin \beta = \varphi.$$

Deriviamo ora la (4) rispetto ad α e moltiplichiamola per $-\lambda \sin \beta$; deriviamo quindi la (4) rispetto a ϱ e moltiplichiamola per $-\lambda \cos \beta$; sostituendo poi per la (3) $\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2}$ con $-\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}$ e sommando le due relazioni così ottenute con la (4) si ha

$$(5) \quad u - 2\lambda \sin \beta \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} = \Phi$$

dove si è posto

$$\Phi = \varphi + \lambda r \frac{\partial \varphi}{\partial l'}$$

e si è indicata con l' la direzione simmetrica di l rispetto alla normale.

L'integrazione di questa equazione si effettua facilmente, considerando α come unica variabile indipendente; l'integrale generale è

$$(6) \quad u = C_1 e^{a_1 \alpha} + C_2 e^{a_2 \alpha}$$

dove

$$a_1 = \frac{i}{\lambda} e^{-i\beta} \quad ; \quad a_2 = -\frac{i}{\lambda} e^{i\beta}$$

$$C_1 = \frac{1}{\lambda^2(a_1 - a_2)} \int_0^\alpha \Phi e^{-a_1 \sigma} \partial \sigma + K_1;$$

$$C_2 = -\frac{1}{\lambda^2(a_1 - a_2)} \int_0^\alpha \Phi e^{-a_2 \sigma} \partial \sigma + K_2$$

e dove K_1 e K_2 sono due funzioni arbitrarie della sola ϱ .

Ora la (5) è una conseguenza necessaria delle (3) e (4), ma non è vero l'inverso; dovremo quindi imporre alla u le ulteriori condizioni:

(I) che al contorno soddisfi la (4);

(II) che sia armonica;

(III) che sia periodica rispetto ad α col periodo 2π .

Cominciamo dall'imporre alla u la condizione (III); cioè determiniamo, se possibile, K_1 e K_2 in modo che la u soddisfi la condizione di periodicità.

Indichiamo con \bar{u} il valore della u per $\alpha + 2\pi$; la condizione (III) si esprimerà allora così:

$$\text{quindi anche } \begin{cases} \bar{u} - u = 0 & \text{per qualunque } \alpha \\ \bar{u}' - u' = 0 \end{cases}$$

Posto

$$\frac{1}{\lambda^2(a_1 - a_2)} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \Phi e^{-a_1\sigma} d\sigma = I_1 ; \quad -\frac{1}{\lambda^2(a_1 - a_2)} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \Phi e^{-a_2\sigma} d\sigma = I_2$$

sarà

$$(7) \quad \bar{u} - u = \left[(C_1 + I_1) e^{a_1 2\pi} - C_1 \right] e^{a_1 \alpha} + \left[(C_2 + I_2) e^{a_2 2\pi} - C_2 \right] e^{a_2 \alpha} = 0$$

$$(8) \quad \bar{u}' - u' = a_1 \left[(C_1 + I_1) e^{a_1 2\pi} - C_1 \right] e^{a_1 \alpha} + \\ + a_2 \left[(C_2 + I_2) e^{a_2 2\pi} - C_2 \right] e^{a_2 \alpha} = 0.$$

Dalle (7) e (8) si trae (supponendo $a_2 \neq a_1$)

$$C_1 = \frac{e^{2\pi a_1}}{1 - e^{2\pi a_1}} I_1 \quad C_2 = \frac{e^{2\pi a_2}}{1 - e^{2\pi a_2}} I_2$$

e quindi per le (6)

$$u = \frac{e^{2\pi a_1}}{1 - e^{2\pi a_1}} I_1 e^{a_1 \alpha} + \frac{e^{2\pi a_2}}{1 - e^{2\pi a_2}} I_2 e^{a_2 \alpha}.$$

Ora è facile verificare che il secondo termine è coniugato del primo; potremo quindi scrivere più brevemente:

$$u = \text{p. r.} \frac{2e^{2\pi a_1}}{1 - e^{2\pi a_1}} I_1 e^{a_1 \alpha},$$

dove col simbolo p. r. si vuol denotare che del secondo membro si considera la sola *parte reale*.

Prima di sostituire per I_1 la sua espressione si osservi che

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \Phi e^{-a_1\sigma} d\sigma = -\lambda \operatorname{sen} \beta \varphi e^{-a_1(\alpha+2\pi)} (1 - e^{2\pi a_1}) + \\ + \cos \beta \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \left(\varphi e^{-i\beta} - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \right) e^{-a_1\sigma} d\sigma;$$

sostituendo questo valore per l'integrale e semplificando, si ottiene infine, (trascurando un termine immaginario):

$$(9) \quad u = \text{p. r.} \frac{e^{a_1(\alpha+2\pi)}}{1 - e^{2\pi a_1}} \frac{1}{i\lambda} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \left(\varphi e^{-i\beta} - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \right) e^{-a_1\sigma} d\sigma.$$

Così la sola condizione di periodicità ha determinato tutti gli elementi che restavano in nostro arbitrio; non resta che da verificare se la u , fornita dalla (9), soddisfa le condizioni (I) e (II), cioè se risolve effettivamente il nostro problema.

Per verificare che l'espressione (9) della u così ottenuta soddisfa la relazione (4), calcoliamo le derivate della (9) rispetto ad α e a ϱ ; avremo:

$$(10) \quad \frac{\partial u}{\partial \alpha} = \text{p. r.} \frac{a_1 e^{a_1(\alpha+2\pi)}}{1 - e^{2\pi a_1}} \frac{1}{\lambda i} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \left(\varphi e^{-i\beta} - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \right) e^{-a_1 \sigma} d\sigma + \\ + \frac{1}{\lambda i} \left(\varphi e^{-i\beta} - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \right)$$

$$(11) \quad \frac{\partial u}{\partial \varrho} = \text{p. r.} \frac{e^{a_1(\alpha+2\pi)}}{1 - e^{2\pi a_1}} \frac{1}{\lambda i} \left\{ \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} e^{-i\beta} e^{-a_1 \sigma} d\sigma + \right. \\ \left. + \lambda a_1^2 \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \varphi e^{-a_1 \sigma} d\sigma \right\} + \frac{1}{i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + a_1 \varphi \right)$$

quindi:

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial \alpha} \sin \beta = \text{p. r.} \frac{e^{a_1(\alpha+2\pi)}}{1 - e^{2\pi a_1}} \frac{\cos \beta \sin \beta}{\lambda} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \left(\varphi e^{-i\beta} - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \right) e^{-a_1 \sigma} d\sigma + \\ + \frac{e^{a_1(\alpha+2\pi)}}{1 - e^{2\pi a_1}} \frac{\sin^2 \beta}{\lambda i} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \left(\varphi e^{-i\beta} - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \right) e^{-a_1 \sigma} d\sigma - \\ - \sin^2 \beta \varphi - i \sin \beta \cos \beta \varphi + i \lambda \sin \beta \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}$$

dove i due ultimi termini si possono trascurare perchè immaginari.

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial \varrho} \cos \beta = \text{p. r.} \frac{e^{a_1(\alpha+2\pi)}}{1 - e^{2\pi a_1}} \left\{ - \frac{\cos^2 \beta}{\lambda i} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \left(\varphi e^{-i\beta} - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \right) e^{-a_1 \sigma} d\sigma + \right. \\ \left. + \frac{\sin \beta \cos \beta}{\lambda} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \left(\varphi e^{-i\beta} - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \right) e^{-a_1 \sigma} d\sigma \right\} + \\ + \cos^2 \beta \varphi + \frac{\lambda \cos \beta}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - i \sin \beta \cos \beta \varphi$$

dove i due ultimi termini (immaginari) si possono trascurare.

Si ha dunque:

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial \alpha} \sin \beta - \lambda \frac{\partial u}{\partial \varrho} \cos \beta = \\ = \text{p. r.} \frac{e^{a_1(\alpha+2\pi)}}{1 - e^{2\pi a_1}} \frac{1}{\lambda i} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \left(\varphi e^{-i\beta} - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \right) e^{-a_1 \sigma} d\sigma - \varphi$$

e confrontando con la (9) si vede che resta verificata la relazione:

$$u + \lambda \frac{\partial u}{\partial \varrho} \cos \beta - \lambda \frac{\partial u}{\partial \alpha} \sin \beta = \varphi.$$

Per verificare ora che la u data dalla (9) è armonica, si ha, derivando ancora le (10) (11) rispettivamente rispetto ad α e a ϱ :

$$(12) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} = \text{p. r.} \frac{\alpha_1^2 e^{\alpha_1(\alpha+2\pi)}}{1 - e^{2\pi\alpha_1}} \frac{1}{\lambda i} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \left(\varphi e^{-i\beta} - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \right) e^{-\alpha_1 \sigma} d\sigma + \\ + \frac{\alpha_1}{\lambda i} \left\{ \left(\varphi e^{-i\beta} - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \right) \right\} + \frac{1}{\lambda i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} e^{-i\beta} - \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varrho \partial \alpha} \right) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} = \text{p. r.} - \alpha_1^2 \frac{e^{\alpha_1(\alpha+2\pi)}}{1 - e^{2\pi\alpha_1}} \frac{1}{\lambda i} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \left(\varphi e^{-i\beta} - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \right) e^{-\alpha_1 \sigma} d\sigma - \\ - \frac{\alpha_1}{\lambda i} \left(\varphi e^{-i\beta} - \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} \right) - \frac{1}{\lambda i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} e^{-i\beta} - \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varrho \partial \alpha} \right).$$

Confrontando questa espressione con la (12) si vede che resta verificata la (3). Dunque la (9) è la formula risolutiva del nostro problema.

Se nella (9) si fa tendere λ verso zero (premettendo al passaggio al limite alcune ovvie trasformazioni e cambiando la variabile di integrazione mediante la sostituzione $\sigma - \alpha = \lambda \xi$) si trova, come era da prevedersi, $u = \varphi$: si ricade infatti nel classico problema di Dirichlet.

Fisica. — *Sulla dispersione rotatoria di soluzioni fluorescenti* ⁽¹⁾. Nota del dott. A. CARRELLI, presentata dal Socio M. CANTONE.

In corrispondenza all'ipotesi per cui si spiega dalle moderne teorie la rotazione del piano di polarizzazione della luce nelle sostanze otticamente attive come dipendente dalla simultanea propagazione di due vibrazioni circolari inverse, per i mezzi assorbenti si ammette la presenza nella molecola di centri di risonanza distinti per onde polarizzate circolarmente in sensi opposti. Il Cotton ⁽²⁾ sperimentando su soluzioni di tartrati di cromo e di rame ha potuto dimostrare per primo questo dicroismo circolare, che nel caso da lui studiato si manifestava per radiazioni dello spettro visibile. Egli infatti determinò i coefficienti di assorbimento per $\lambda = 5893$ delle onde con polarizzazione circolare opposta, trovandoli diversi, e in conseguenza di ciò potè dimostrare che un fascio di luce naturale propagantesi in tali soluzioni dicroiche all'uscita dalla soluzione presenta una parziale polarizzazione ellittica ⁽³⁾.

Si consideri ora una soluzione di una sostanza che sia otticamente attiva e nello stesso tempo fluorescente. In molecole di tale sostanza i centri di

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto fisico della R. Università di Napoli.

⁽²⁾ Cotton, C. R., 120, pp. 989, 1044.

⁽³⁾ Le esperienze di Cotton sono state continuate da altri e ultimamente da Bruhat (Ann. de Phys., Mars-Mai, 1915) in maniera molto particolareggiata ed interessante.

assorbimento e di emissione possono essere connessi con l'asimmetria molecolare, ed il problema studiato in questa Nota è di stabilire se esiste una relazione fra i due ordini di centri, o più precisamente se una sostanza che presenta fluorescenza ed attività ottica emette con maggiore intensità radiazioni nello stesso stato di polarizzazione di quella che assorbe più intensamente nella banda di assorbimento che genera l'emissione. Ho cercato pertanto di stabilire se esiste un *dicroismo circolare nell'emissione*.

Nel caso analogo di vibrazioni polarizzate rettilineamente, i cristalli fluorescenti hanno presentato una diversità molto notevole nella luce emessa a seconda della orientazione rispetto agli assi cristallografici del vettore elettrico della luce eccitatrice ⁽¹⁾, e nel caso in esame la quistione si presenterebbe in maniera più favorevole se l'indagine potesse condursi su cristalli emiedrici enantiomorfi di una sostanza dotata delle due proprietà, poichè nella massa cristallina le condizioni di regolare struttura sono particolarmente favorevoli per un'emissione di luce polarizzata; ma in mancanza di tale sostanza ho fatto uso di soluzioni, tenendo presente che in base a recenti esperienze, da queste con eccitazione di luce polarizzata si riesce ad ottenere luce con parziale polarizzazione ⁽²⁾.

Ho scelto come sostanze tre sali di chinino, solfato, bisolfato e cloridrato, aventi in modo cospicuo le due proprietà richieste ed ho preparato soluzioni in acqua ed in alcool etilico, eccitando la fluorescenza con lampada a vapori di mercurio.

Il fascio luminoso veniva concentrato mediante lente sulla parete di una vaschetta contenente la soluzione acquosa di solfato di chinina; fra la lente e la vaschetta veniva interposto un nicol e quindi una bilamina di mica quarto d'onda, convenientemente orientata, in modo da fornire due fasci con polarizzazione ellittica e di varia ellitticità per le varie frequenze ⁽³⁾ in sensi opposti. Disposti così gli apparecchi se in corrispondenza ad un diverso coefficiente di assorbimento per onde polarizzate in sensi opposti ci fosse stata una diversa capacità nell'emissione, si sarebbe dovuta notare una differenza d'intensità fra i due pennacchi luminosi che individuavano il percorso dei raggi eccitatori nell'interno della vaschetta, ma non si è riscontrata alcuna differenza apprezzabile.

Si è quindi pensato a far ricorso al doppio filtro di Stokes, osservando in direzione longitudinale se si riscontrava differenza nei due campi; ma per azione dei due filtri l'intensità della luce emessa che giungeva all'occhio era tanto debole da non permettere una analisi sicura sul suo stato di polarizzazione. Ho pensato quindi di usufruire solo della luce *epipolica*, che è molto più intensa, eliminando qualunque altro mezzo assorbente che non

(1) Wood, Phys., opt., pag. 437; Pochettino, N. C., 3^a ser., tom. 8^o, pag. 438.

(2) Weigert e Schmidt, Phys. Zeit., 33, 132, 1922.

(3) Ciò dipendeva dal fatto che la bilamina era quarto d'onda per luce di sodio.

sia il sistema polarizzante, nicol e bilamina, con l'illuminare dall'alto la soluzione.

L'osservazione dei due campi si faceva lateralmente, e neanche in tal modo fu notata differenza.

Come ultimi tentativi di esperienze di questo tipo ho attuato due dispositivi, che sarebbero propriamente i meglio adatti per realizzare nel caso della emissione le esperienze di Cotton relative all'assorbimento. Come sorgente ho adoperato l'arco tra elettrodi di ferro, che si è presentato particolarmente indicato per l'eccitazione della fluorescenza di queste sostanze.

Il fascio reso parallelo da una lente di quarzo veniva fatto cadere mediante uno specchio sulla superficie libera della soluzione, dopo il passaggio attraverso il nicol, e l'osservazione della luce epipolica veniva fatta mediante una lente dicroica. Se le due vibrazioni circolari di sensi opposti, coesistenti nel fascio a polarizzazione rettilinea, che cadeva sulla superficie libera della soluzione producevano una emissione di intensità diversa ed in parziale polarizzazione dello stesso tipo, ruotando la lente attorno al suo asse si sarebbe dovuta notare una variazione d'intensità nei due campi, ma non si verificò alcun effetto di tal natura.

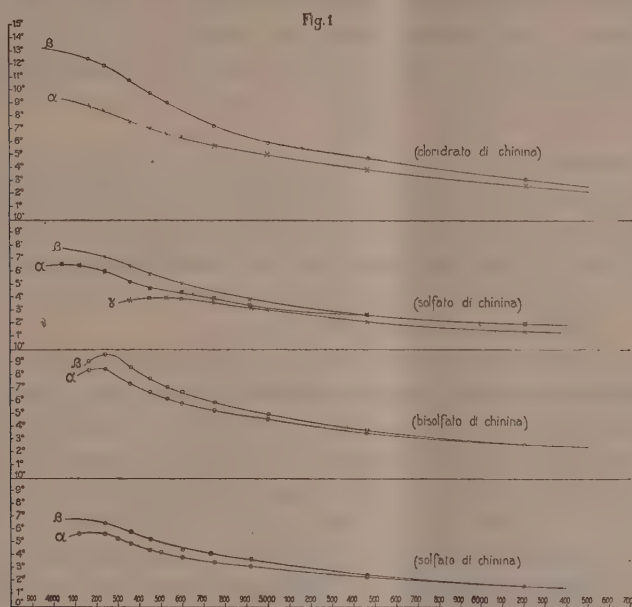
Compinti questi tentativi aventi principalmente un carattere sintetico, ho fatto ricorso alla determinazione della curva di dispersione rotatoria, potendosi così porre in luce con metodo più preciso ed in modo completo il comportamento delle sostanze scelte, riguardo alla propagazione delle onde polarizzate circolarmente nella zona di emissione.

Il polarimetro usato era un Laurent, che ho trasformato mediante un piccolo nicol posto immediatamente dopo il nicol polarizzante in un apparecchio a penombra del tipo Lippich per tutte le radiazioni ⁽¹⁾; uno spettroscopio con una seconda fenditura nel piano focale del cannocchiale senza l'oculare era disposto avanti il polarimetro, in modo che illuminando con sorgente appropriata la fenditura del collimatore si poteva inviare nel polarimetro luce di determinata frequenza, mediante opportuni spostamenti del cannocchiale dello spettroscopio. Ho usato come sorgenti la lampada a vapori di mercurio e l'arco tra elettrodi di ferro. La sensibilità raggiunta con il polarimetro usato non è molto grande poichè mediante il nonio si poteva apprezzare solo il 1'.

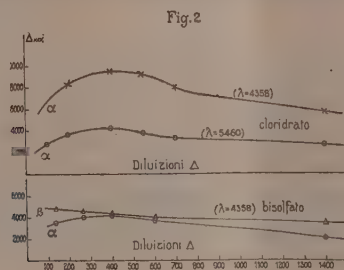
Gli scarti massimi si riscontrano nel violetto dove raggiungono i 30', ed ho cercato di ovviare a tale inconveniente facendo un maggior numero di misure e d'altra parte il maggior valore della rotazione in tale zona rende l'errore relativo più piccolo. Ho fatto uso di soluzioni alcoliche poichè la maggiore solubilità dei sali in alcool etilico rispetto all'acqua permetteva di ottenere rotazioni più grandi. I risultati ottenuti possono osservarsi nella fig. 1 che riproduce le curve di dispersione rotatoria delle soluzioni studiate.

(¹) Cfr. Bruhat, loc. cit.

Esse mostrano tutte un andamento normale nella zona in cui queste sostanze emettono e ciò specie per le soluzioni acidificate con poche gocce di acido solforico (curve β), le quali presentano una grande esaltazione del po-



tere fluorescente. Al di là della zona di emissione e cioè nel violetto estremo si nota l'andamento anomalo, dipendente dal dicroismo circolare nell'assorbi-



mento. Se però l'acidificazione non esalta in modo da renderlo misurabile con i mezzi impiegati un dicroismo circolare nell'emissione, un'azione dipendente dall'acido è però non dubbia. Si verifica infatti, curva β , un aumento del potere rotatorio e non uguale per tutte le frequenze, in maniera che l'acidificazione sembra produrre lo stesso effetto di un aumento di concentrazione. Ho determinato l'angolo α di rotazione del piano di polarizzazione per λ costante in funzione della diluizione D , relativamente ad una soluzione acidificata e ad un'altra neutra di bisolfato. Nella fig. 2 è tracciata la curva re-

lativa ad $\alpha \cdot D$ in funzione di D , ed infine l'andamento del prodotto $\alpha \cdot D$ relativamente ad una soluzione di cloridrato per due lunghezze di onda diverse. Come si vede nella fig. 2, in ciascuno dei due casi invece di una retta parallela all'asse della D indicante una legge di proporzionalità alla concentrazione, si ha una curva con andamento alquanto complesso.

Queste soluzioni ed in special modo le acidificate, esposte alla luce solare hanno presentato delle modificazioni acquistando da trasparenti una tinta giallastra.

Ho determinato la curva di dispersione rotatoria per una soluzione di solfato così alterata e come si vede dal terzo diagramma della fig. 1 (curva γ) la dispersione rotatoria è più piccola e segue un diverso andamento. Anche per il bisolfato esposto alla luce solare si nota in corrispondenza alla variazione di tinta, una diminuzione del potere rotatorio che aumenta dal rosso al violetto, ma in questo caso la diminuzione è minore.

L'emissione per fluorescenza sembra anche in questi casi connessa con una trasformazione molecolare, come già dimostrò il Perrin ⁽¹⁾, e come ultimamente ha confermato il Wood ⁽²⁾ ottenendo spettri di assorbimento distinti per le nuove sostanze generate da quelle fluorescenti. Questa modificazione nel caso dei sali di chinina studiati, sembra diminuire l'asimmetria molecolare.

Per ciò che riguarda dal lato chimico l'azione dell'acido da ricerche compiute da Buckingham ⁽³⁾ sulla conducibilità elettrolitica risulta che la fluorescenza dipende dagli ioni; ma poichè ho potuto constatare che nello stato solido mentre il bisolfato è energicamente fluorescente gli altri due sali, il solfato ed il cloridrato, nelle stesse condizioni di eccitazione sono quasi del tutto non luminosi si vede che dipende da una speciale instabilità molecolare che è dipendente dal legame del gruppo acido combinato con la chinina.

Concludendo:

1°) ricerche compiute con svariati metodi ed infine con la determinazione della dispersione rotatoria di soluzioni in alcool etilico di tre sali di chinina, fluorescenti ed otticamente attivi, hanno portato al risultato che almeno nell'ambito della sensibilità raggiunta non compare un di-croismo circolare nella emissione analogamente a quello dimostrato da Cotton nell'assorbimento;

2°) per le sostanze predette l'acidificazione con acido solforico produce, oltre al noto aumento della fluorescenza, anche un aumento del potere rotatorio;

(1) Perrin, Ann. de Phys., Sept.-Oct. 1918.

(2) Wood, Phil. Mag.-Avril 1922.

(3) Zeit. phys. chim. 14-129, 1894.

3°) la diversità del legame chimico di questi tre sali, cloridrato, solfato e bisolfato, si riscontra anche in alcune particolarità da questi presentate;

4°) in questi composti la fluorescenza sembra collegata, in accordo con la teoria di Perrin, ad una modificazione molecolare prodotta dall'azione della luce.

Fisica. — *Sul neutrone del Rutherford.* Nota di A. PONTREMOLI, presentata dal Socio O. M. CORBINO.

Nella sua Bakerian Lecture ⁽¹⁾ pel 1920, il Rutherford accenna alla possibile esistenza di particelle con dimensioni dell'ordine di grandezza dei nuclei e carica zero (dove il nome di neutroni) cui si addirebbero ben singolari proprietà.

Estremamente penetranti per la loro piccolezza e per avere un campo esterno praticamente nullo (eccetto che per punti molto prossimi al nucleo), questi neutroni muoverebbero liberamente attraverso alla materia e sarebbero quindi difficilmente trattenibili in un recipiente. D'altra parte riuscendo un neutrone a penetrare nella costituzione nucleare di un atomo, potrebbe trasformarlo in un isotopo se vi fosse completamente trattenuto, o nell'atomo di un altro elemento, a numero atomico diverso, se l'azione dell'intenso campo elettrico esistente nel nucleo lo disintegrasse provocando l'espulsione di una carica o più. La struttura di tali neutroni consentirebbe perciò una ipotesi sulla sintesi degli elementi pesanti, energeticamente più accettabile di quella in cui il passaggio da un elemento ad un'altro si suppone causato dall'ingresso nel nucleo di una nuova carica elettrica, contro l'azione del campo delle cariche ivi preesistenti.

Il Rutherford ferma la propria attenzione sul neutrone costituito da un nucleo d'idrogeno e da un elettrone: una specie di atomo di idrogeno di dimensioni molto piccole rispetto a quello abituale è che naturalmente di esso non possederebbe alcuna proprietà. Non essendo presumibile, per la grande stabilità di tale sistema di cariche, il metterle in evidenza per via spettroscopica, recentemente il Glasston ⁽²⁾ ha eseguito delle esperienze per vedere se era possibile rivelarne la presenza in un tubo di scarica a raggi positivi di idrogeno, ove (sussistendovi una notevole quantità di nuclei H e di elettroni liberi) potrebbero essere facilitate le circostanze di formazione di questi neutroni. Il Glasston basò le proprie esperienze sull'ipotesi che avvenendo una intima collisione fra un neutrone ed un nucleo di un atomo pesante, si avrebbe una rottura o una redistribuzione nella configurazione

(1) Rutherford, Proc. Roy. Soc. XCVIII A, 396 (1920).

(2) Glasston, Phil. Mag. 42, pag. 596 (1921).

del nucleo pesante o del neutrone, o di ambedue, con accompagnamento di ionizzazione locale. Il risultato attuale dell'esperienza è negativo. Ma date le contingenze elettriche in cui il Glasson ha lavorato (caduta di potenziale da 2,000 a 50,000 volts nel tubo di scarica), la conclusione può anche non essere definitiva perchè nulla ancora sappiamo sull'energia relativa necessaria per avvicinare alle distanze in questione un nucleo di idrogeno ad un elettrone, nè sul numero di eventi favorevoli che si manifestano e la conseguente possibilità di misurarne gli effetti.

Se ci basiamo sulla teoria di Bohr e sul conseguente modello dell'atomo di idrogeno, dobbiamo escludere a priori che il neutrone di idrogeno consti di un nucleo positivo attorno a cui ruota un elettrone: infatti la prima orbita stabile concessa dalla teoria di Bohr per tale configurazione è quella dell'atomo di idrogeno allo stato stazionario, nè si può ammettere ne esista una con raggio minore, senza contravvenire al postulato per cui il momento d'impulso dell'elettrone è uguale ad un numero intero moltiplicato per $\frac{h}{2\pi}$.

Se noi vogliamo pertanto mantenere, sia per l'elettrone che per il nucleo di idrogeno, gli abituali modelli con masse di origine elettromagnetica e le dimensioni note, non abbiamo che una distribuzione di cariche possibile per il neutrone che ne deriva: quella in cui l'elettrone è tangente in un punto al nucleo positivo e costituisce così con esso un dubletto neutro, nè è evidentemente possibile supporre che il moto di insieme di questo dubletto possa per azioni elettrodinamiche apportare delle modificazioni al sistema. Quale sarà la massa elettromagnetica di riposo del neutrone? Per il principio di relatività essa sarà data dal rapporto tra l'energia potenziale totale del sistema e il quadrato della velocità della luce: nel calcolo di detta energia dovendosi integrare il *quadrato* del campo elettrostatico risultante per tutto lo spazio esterno alle cariche, l'energia potenziale del neutrone, e quindi la sua massa, non sarà eguale alla somma dell'energia potenziale delle singole cariche, ma ne differirà per una quantità funzione del prodotto interno dei campi elettrostatici generati da ciascuna carica.

Supponiamo che l'elettrone e il nucleo positivo su cui operiamo siano sferici a distribuzione di carica spaziale. Il Silberstein ⁽¹⁾ ha già calcolato, partendo dalla struttura del momento elettromagnetico di un sistema di cariche, qual'è la massa mutua da aggiungersi alla somma delle masse componenti per ottenere la massa totale del sistema.

La formula cui egli giunge è data, in unità C. G. S. da

$$Am = \frac{2e_1 e_2}{ac^2} \left[1 - \frac{1}{5} \frac{r_1^2 + r_2^2}{a^2} \right]$$

(¹) Silberstein, Phys. Zeit. XII, pag. 87 (1911).

dove Δm è la massa mutua, e_1, e_2 le cariche delle due particelle in presenza, r_1, r_2 i loro raggi, a la distanza dei rispettivi centri. Nel nostro caso per essere $a = r_1 + r_2, r_i = \frac{3}{5} \frac{e_i^2}{m_i c^2}, e_1 = -e_2 = -e$, e ponendo $m_1 = \alpha m_2$, dove l'indice 1 compete al nucleo, avremo

$$\Delta m = -\frac{4}{3} m_1 \left[\frac{\alpha + 2(1 + \alpha)^2}{(1 + \alpha)^3} \right].$$

Le esperienze spettroscopiche in cui si determina la massa del nucleo di idrogeno attraverso alla variazione del numero di Rydberg per il moto del nucleo attorno al centro di gravità dell'atomo, ci danno $m_1 = 1,66.10^{-24}$ e per il rapporto ⁽¹⁾ tra detta massa e quella dell'elettrone $\alpha = 1846,9$

Ne risulta

$$\Delta m = -2,396.10^{-27},$$

a questa diminuzione di massa corrisponderà una emissione di energia all'atto della formazione del neutrone, secondo la formula $\Delta E = \Delta m \cdot c^2$ pari a

$$\Delta E = -2,156.10^{-6} \text{ ergs}$$

ossia $\Delta E = -1,31.10^{18}$ ergs per grammo atomo di neutroni, corrispondente a $-3,12.10^7$ grandi calorie.

Se avvenisse la formazione attraverso al passaggio di un solo quanto, sarebbe contemporaneamente emessa una radiazione estremamente breve, di circa 9 millesimi di Ångström.

La differenza tra il peso atomico del nucleo di elio e il peso atomico dei quattro nuclei di idrogeno che lo costituiscono (trascurando in questo caso la massa dei due elettroni presenti) ci dà per l'energia di formazione di un grammo atomo di elio $6,3.10^9$ grandi calorie ⁽²⁾. Il modello del neutrone discusso è dunque, malgrado la estrema vicinanza delle cariche, meno stabile di quello di un nucleo d'elio: in particolare sarebbe ancora disintegrabile da una collisione con una particella α del Ra C che ha una energia cinetica per grammo atomo eguale a $8,1.10^{18}$ ergs.

In un neutrone la distribuzione più semplice di cariche in moto, che si accordi coi postulati di Bohr, è quella in cui due nuclei positivi di idrogeno ruotano in un piano e sono trattieneuti sulla loro orbita da due elettroni simmetrici situati sull'asse dell'orbita stessa; un modello cioè di molecola di idrogeno ove si sia sostituito alle cariche positive quelle negative e reciprocamente.

Si appura subito come questo neutrone sia di dimensioni nucleari: se nel nucleo valgono ancora le leggi di Coulomb, per avere le caratteristiche

⁽¹⁾ Flamm, Phys. Zeit. XVIII, pag. 515 (1917).

⁽²⁾ Sommerfeld, Atombau u. Spektrallinie, 3^a Ed., pag. 117.

dinamiche del neutrone basterà, nelle formule che danno le corrispondenti relazioni per la molecola di idrogeno, sostituire alla carica e massa degli elettroni quella dei nuclei e reciprocamente. Ciò, come è ovvio, perchè i due modelli sono rimasti simili non essendo mutate le simmetrie assiali ed equatoriali.

Si ottiene così ⁽¹⁾ per il raggio a dell'orbita circolare descritta dai due nuclei $a = 2,75 \cdot 10^{-12}$ e per la distanza b dei centri degli elettroni dal centro dell'orbita $b = 1,59 \cdot 10^{-12}$. In modo analogo si ricaverebbero facilmente la velocità angolare e l'energia totale relativa ad ogni orbita nonchè il lavoro di dissociazione e il potenziale di ionizzazione. Ammettendo che i nuclei positivi passino ancora quantisticamente da un'orbita all'altra, questi neutroni emetteranno uno spettro nella zona dei raggi X, giacchè per avere le frequenze delle righe emesse basta moltiplicare per $\alpha = 1846,9$ le frequenze dello spettro della molecola di idrogeno.

Sarà particolarmente interessante, superate alcune difficoltà di carattere analitico, determinare la massa mutua dovuta al sovrapporsi dei singoli campi elettrostatici delle cariche avvicinate a distanze dell'ordine nucleare, secondo i modelli del Rutherford, e dotate di moti in accordo con la teoria di Bohr.

Se la massa mutua per nucleo di ogni atomo sarà eguale al difetto di massa che sperimentalmente ci rivelano le determinazioni dell'Aston collegate con le accennate ipotesi sulla costituzione nucleare, avremo una sicura conferma dell'origine elettromagnetica della materia.

Fisica. — *Sulla trasformazione del nichel al punto Curie.*

Nota di L. TIERI, presentata dal Socio CORBINO.

Come è noto, i metalli ferromagnetici, portati ad una conveniente temperatura (punto Curie), perdono le loro proprietà ferromagnetiche.

Secondo alcuni, tale fenomeno è dovuto ad una trasformazione allotropica, secondo altri la trasformazione è di origine puramente magnetica.

Il Dejean, interpretando alcune sue interessanti esperienze ⁽²⁾, giunge alla conclusione che la discontinuità apparente che si proluce al punto Curie nelle proprietà magnetiche, può anche spiegarsi con l'allontanamento progressivo dei magnetini elementari, man mano che la temperatura della sostanza ferromagnetica aumenta.

Il Dejean perviene a tale conclusione fondandosi sul fatto che quando il rapporto fra lunghezza e diametro di una sbarra di materiale magnetico

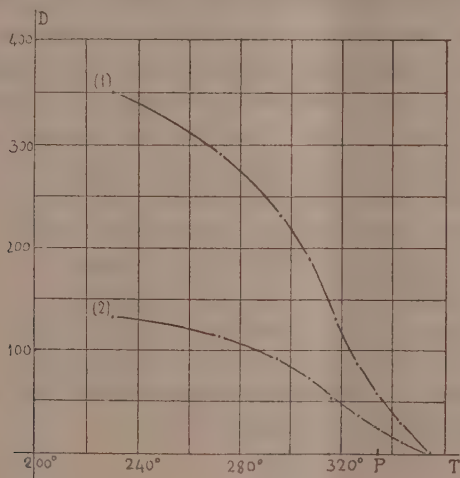
⁽¹⁾ Sommerfeld, loc. cit., pag. 728.

⁽²⁾ Comptes Rendus, 1921, 2^o sem., tom. 173, pp. 650, 770, 412; Annales de Physique, tom. XVIII. 1922, pp. 171-272.

diminuisce, la curva di magnetizzazione di essa va sempre più avvicinandosi alla curva teorica dei corpi paramagnetici a causa dell'aumento progressivo del campo smagnetizzante; quindi ammette che una sostanza ferromagnetica risulti costituita da magnetini elementari a grande campo smagnetizzante, disposti in fletti e sufficientemente vicini fra loro, in modo che per le loro azioni mutue, il campo smagnetizzante elementare sia annullato.

Sotto l'influenza di un aumento di temperatura, i magnetini elementari si allontanano, le azioni mutue diventano deboli e il corpo si trasforma da ferromagnetico a paramagnetico.

L'ipotesi del Dejean dovrebbe portare come conseguenza che per un filo di materiale ferromagnetico, sottoposto a tensione, il punto Curie dovrebbe



subire uno spostamento verso temperature più basse a causa dell'allontanamento dei magnetini elementari prodotto da essa.

Esperienze al riguardo furono eseguite da me e dalla dott. Casanova col metodo magnetometrico e col metodo del galvanometro balistico. Descrivo brevemente le esperienze eseguite col secondo metodo.

Un filo di nichel lungo 580 mm. e della sezione di circa 1 mm². era disposto verticalmente secondo l'asse di una bobina magnetizzante della lunghezza di cm. 73, la quale era collegata in serie con una seconda bobina e con una batteria di accumulatori (circuito primario).

Due bobine coassiali con le precedenti erano riunite in serie e collegate col galvanometro balistico (circuito secondario).

L'avvolgimento secondario della seconda bobina primaria era mobile e veniva regolata la sua posizione in modo da ridurre a zero la deviazione nel galvanometro balistico all'apertura o alla chiusura del circuito primario, quando nell'interno della bobina disposta verticalmente non vi era il filo di nichel.

Il filo di nichel veniva riscaldato per mezzo di un avvolgimento non induttivo di manganina percorso da corrente elettrica, posto fra il filo di nichel e la bobina magnetizzante, di cui la temperatura veniva conservata sensibilmente costante con acqua che circolava fra essa e l'avvolgimento di manganina.

Le temperature del filo di nichel si determinavano con una pinza termoelettrica platino, platino-rodio.

Nella figura sono riportate sull'asse delle ascisse le temperature del filo di nichel, sull'asse delle ordinate le deviazioni impulsive date dal galvanometro balistico all'apertura del circuito primario, con un campo magnetizzante di 30 unità.

Per ogni esperienza si aveva l'avvertenza di far percorrere alla sostanza ferromagnetica una serie di cicli simmetrici fra ± 30 unità.

Il diagramma (1) si riferisce al filo di nichel non sottoposto a tensione, il (2) allo stesso filo sottoposto ad un peso tensore di 7 Kg.

Da essi risulta che il nichel perde le sue proprietà magnetiche alla temperatura di circa 355° , sia e no sottoposto ad una tensione.

L'allungamento prodotto nel filo di nichel dal peso tensore di 7 Kg., risulta approssimativamente uguale all'allungamento prodotto nello stesso filo da un aumento di temperatura di 21° ; perciò la curva (2) avrebbe dovuto incontrare l'asse delle ascisse nel punto P di temperatura 334° .

Pertanto, qualora si voglia ammettere che la trasformazione al punto Curie sia di origine puramente magnetica, l'allontanamento dei magnetini elementari, costituenti la sostanza ferromagnetica, non può essere la sola causa che determina tale trasformazione.

Chimica. — *Solubilità allo stato solido fra cadmio e tallio.*
Nota di CLARA DI CAPUA, presentata dal Corrisp. N. PARRAVANO.

Le leghe di Cd e Tl sono state studiate da Kurnakow e Puschin⁽¹⁾ i quali hanno accuratamente descritto la curva iniziale di solidificazione del relativo diagramma di stato.

Gli estremi della orizzontale eutettica non sono stati però definiti con sicurezza da detti autori, per modo che è incerto se esista o no ed eventualmente in che misura, una solubilità allo stato solido del Tl nel Cd e viceversa.

Secondo il diagramma disegnato da Kurnakow e Puschin, il Tl si scioglierebbe nel Cd, alla temperatura dell'eutettico, nella proporzione di 20 atomi % mentre sarebbe nulla la solubilità del Cd nel Tl.

(¹) Zeit. anorg. Ch., 30, 101 (1902).

Bornemann⁽¹⁾ invece, considerando che l'abbassamento del punto di fusione del Cd per aggiunta di Tl è quello che si calcola ammettendo che il Tl si scioglia allo stato di molecola monoatomica e che il Cd cristallizzi puro, mentre ciò non si verifica nel caso dell'aggiunta di Cd a Tl, ritiene che la solubilità di Tl in Cd sia nulla e ammette una solubilità di 16 atomi % di Cd in Tl.

Ho creduto opportuno definire la questione ridescrivendo il diagramma di stato di queste leghe col metodo di Plato⁽²⁾, del quale ho ricordato le preziose caratteristiche in una Nota precedente sulla solubilità allo stato solido del bismuto e del cadmio nel piombo⁽³⁾.

Queste ricerche, d'altra parte, formano, assieme alle precedenti ricordate sulle leghe Pb-Cd, la necessaria base dello studio di cui darò prossimamente notizia sulle leghe ternarie Pb-Cd-Tl.

I risultati delle esperienze sono riportati nella tabella e riassunti nel diagramma della figura qui appresso riportata.

| N d'ordine delle leghe | Composizione in % | | Temp. iniziali di solidificazione | Temp. eutettica | Durata dell'ar- resto eutettico riferito alla massa 1 e alla velocità 1 |
|---------------------------|----------------------|-----|--------------------------------------|--------------------|---|
| | Cd | Tl | | | |
| 1 | — | 100 | 303° | — | — |
| 2 | 6 | 94 | 253 | 203° | 1 |
| 3 | 10 | 90 | 229 | " | 1,9 |
| 4 | 15 | 85 | 206 | " | 2,6 |
| 5 | 25 | 75 | 216 | " | 2,5 |
| 6 | 50 | 50 | 252 | " | 1,8 |
| 7 | 65 | 35 | 260 | " | 1,45 |
| 8 | 85 | 15 | 286 | " | 0,8 |
| 9 | 90 | 10 | 296 | " | 0,6 |
| 10 | 95 | 5 | 306 | " | 0,35 |
| 11 | 100 | — | 322 | — | — |

Come si vede, l'eutettico viene a trovarsi a circa l'82 % di Tl.

La curva iniziale di solidificazione rassomiglia molto a quella di Kur-nakow e Puschin; nettamente differenti invece sono i risultati per quel che riguarda la estensione della orizzontale eutettica.

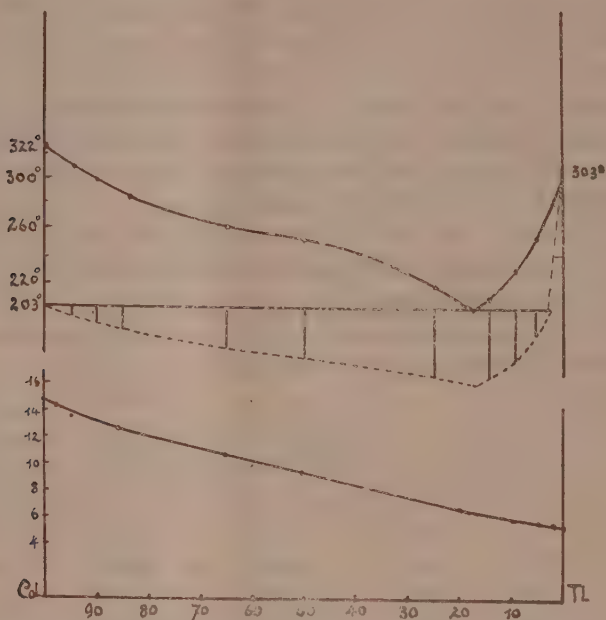
Dal lato del Cd l'arresto eutettico nelle mie esperienze si annulla praticamente in corrispondenza del metallo puro, per modo che deve escludersi una solubilità in misura apprezzabile del Tl nel Cd: dal lato invece del Tl l'arresto eutettico si annulla ad una concentrazione di circa il 2,5 % di Cd.

(¹) Metallurgie, 7, 103 (1910).

(²) Zeit. phys. Ch., 55, 721 (1906,; id. 58, 350 (1907).

(³) Questi Rendiconti, (5), 31, 1° sem., 162 (1922)

Il Cd perciò è solubile in piccola quantità nel Tl allo stato solido.
Nella speranza di confermare questa conclusione ho misurato la conducibilità elettrica delle leghe di Cd-Tl. I valori di conducibilità specifica



trovati sono riportati nella tabella che segue e riprodotti in basso nel diagramma della figura.

| Composizione delle leghe | | Conducibilità specifiche a 10° |
|--------------------------|------|-----------------------------------|
| Cd % | Tl % | |
| 100 | — | 14,97 ^{10⁴} |
| 98 | 2 | 14,36 |
| 95 | 5 | 13,25 |
| 85 | 15 | 12,62 |
| 65 | 35 | 11,13 |
| 50 | 50 | 9,467 |
| 20 | 80 | 6,418 |
| 5 | 95 | 5,927 |
| 2 | 98 | 5,605 |
| — | 100 | 5,485 |

Come si rileva dalla figura questi valori confermano la non solubilità del tallio nel cadmio, ma non quella, osservata, del cadmio nel tallio.

Ho cercato perciò questa conferma per altra via.

Ho misurato cioè esattamente l'abbassamento del punto di congelamento del tallio prodotto dall'aggiunta di piccole quantità di cadmio, ottenendo i seguenti risultati:

| Gr. atomi di cadmio disciolti in 100 di Tl | Depressione atomica trovata | Depressione atomica calcolata |
|---|--------------------------------|----------------------------------|
| 0,91 | 1,75 | |
| 1,83 | 3,21 | |
| 2,76 | 3,55 | 4,48° |
| 3,70 | 3,48 | |

Il valore 4,48 è stato calcolato assumendo come calore di fusione del tallio 7,2 e ammettendo che il cadmio vi si scioglia come molecola monoatomica. I valori trovati da Kurnakow e Puschin oscillano fra 2,0 e 4,7; anche questi sono inferiori al calcolato (per gli autori russi è circa 6,0), e confermano perciò la separazione del cadmio in soluzione solida nel tallio.

Botanica. — *Le basse temperature al momento della germinazione fanno sfuggire il grano all'attacco della carie?* Nota di O. MUNERATI, presentata dal Socio R. PIROTTA.

Se è ammesso — ed è agevole il comprovare sperimentalmente — che il frumento giunge a sfuggire all'attacco della carie allorchè la germinazione del granello abbia luogo con grande rapidità (condizione assai facile a verificarsi in pratica con semine molto precoci in autunno oppure tardive in primavera), non tutti convengono nel ritenere che la pianta sfugga parimenti all'infezione anche nel caso in cui il processo germinativo si svolga con estrema lentezza in conseguenza di decorsi con escursioni massime al disotto dei cinque centigradi (condizione possibile quando la semina sia accompagnata o seguita da freddi prolungati).

K. v. Tubeuf (1902) è del parere che a temperature al disotto dei 5 centigradi il grano possa germinare e non così la *Tilletia* (spp.) (1).

Il pensiero di v. Tubeuf è accolto con riserva da L. Hecke (1909).

(1) Vengono dati dagli AA. i seguenti estremi (in centigradi):

| | TEMPERATURE DI GERMINAZIONE | |
|-------------------|-----------------------------|-----------------|
| | <i>Frumento</i> | <i>Tilletia</i> |
| Minimo | 3.0 - 4.5 | 5 |
| Ottimo. | 25 | 16 - 18 |
| Massimo | 30 | 25 |

Come si comprende, sono cifre cui deve attribuirsi un significato e una portata di ordine relativo. È, poi, assolutamente vero che la *Tilletia* (spp.) non germina al disotto dei quattro centigradi?

Müller e Molz in un primo tempo (1913) scrivono: « L'influenza dei decorsi delle temperature all'atto della germinazione del cereale sulle possibilità di infezione per *Tilletia* richiede ulteriori delucidazioni »: e successivamente, nel 1914, riportano dati di loro esperienze in pieno campo dalle quali risulta che, con una semina compiuta alla fine di novembre, il grano fu assai meno colpito dalla carie di quello seminato in ottobre (su parcelle di 30 metri quadrati furono trovate colpite: 8040 spighe con semina il 5 ottobre, 2970 con semina il 26 ottobre, 174 con semina il 23 novembre). Ora, riportandosi ai decorsi delle temperature nel periodo medesimo, gli Autori credono di dover ascrivere la quasi mancata contaminazione, registrata con la semina tardiva, alle basse temperature che seguirono l'investimento della parcella in questione.

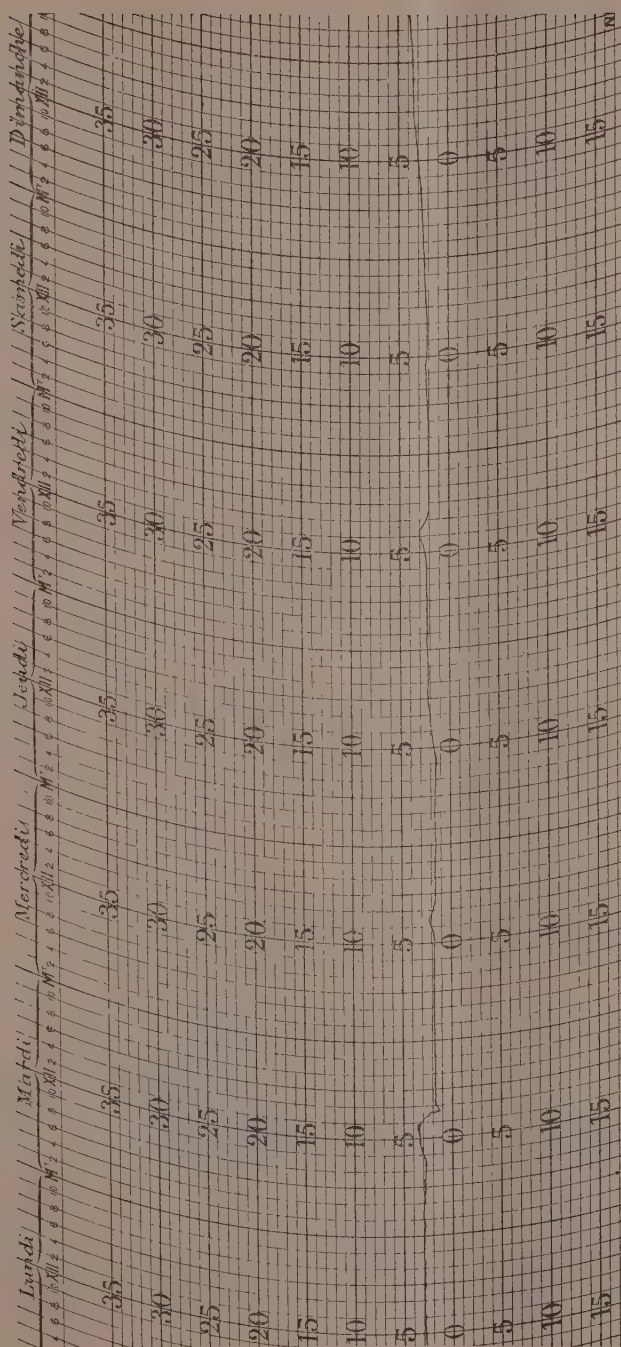
Nel 1917 L. R. Jones, occupandosi del tema generico delle temperature del suolo nei loro rapporti con la fitopatologia, accennando alle infezioni del grano per *Tilletia*, scrive: « secondo Humphrey (per corrispondenza) sembra fatto stabilito che le temperature del terreno da zero a cinque centigradi sono decisamente sfavorevoli alla carie, al pari delle temperature al disopra dei 22° ».

W. Heuser, da esperienze effettuate nel 1920-1921 con semine in successione a intervalli di una decina di giorni circa (dal 27 settembre al 10 aprile) non giunge a conclusioni probative.

C. O. Johnston, in una comunicazione al 43° Congresso della Società americana di fitopatologia in Boston, dicembre 1922, osservava: Alle semine tardive corrispondono percentuali più elevate di spighe cariate rispetto alle semine precoci (si registrarono attacchi sempre più gravi con semine successive dal 15 settembre al 1° novembre); ma con semine ulteriori la percentuale d'infezione andò rapidamente declinando.

Si comprende, d'altro canto, come sia estremamente difficile orientarsi allorchè si operi sotto condizioni naturali, così poco dominabili e così bruscamente e inopinatamente mutabili. Vi è qualche sperimentatore (Hecke) che si preoccupa di tenere conto del periodo di giorni intercorrente tra momento della semina e uscita delle piantine dal suolo; ma si comprende come codesto criterio debba risultare in atto del tutto insufficiente: un seme può rimanere per 25-30 giorni ingerminato entro il terreno in conseguenza di freddi prolungati (attorno a zero), mentre la temperatura può improvvisamente salire a 8-10 centigradi, cui si muovono insieme parassita e ospite; oppure le temperature di 8-10 si possono verificare per alcuni giorni subito dopo le semine, con possibilità quindi da parte del fungillo di farsi strada entro la piumetta, mentre il prolungato periodo di freddi, capace di arrestare ogni ulteriore accrescimento delle piantine, può aversi in prosieguo ⁽¹⁾. Nè è, in rigore, da

(1) Così nelle esperienze di Heuser si registrarono a un di presso le stesse percentuali di spighe cariate con periodi, tra semina e uscita delle piantine, di una ventina di giorni in certi casi e di oltre settanta giorni in altri (loc. cit., pp. 92-93).



Uno dei decorsi ebdomadari (20-27 marzo) di un termometro registratore Richard, tipo così detto a gambo flessibile a contatto con il letto di germinazione.

(N. B. Allorchè la punta tende a superare i quattro centigradi, si fa agire il frigorifero fino a che l'aria della cella si riabbassi ai due circa).

escludersi che, nello spazio di tempo tra semina e germinazione, precipitazioni torrenziali pervengano a dilavare i granelli così da aversi in atto una riduzione nel numero di spore aderenti ai medesimi, onde la più bassa percentuale di piante colpite dal fungillo con semine estremamente tardive potrebbe trovare la sua logica spiegazione in un'asepsi meccanica del tegumento.

Poichè frattanto, di fronte all'incertezza dei giudizi, il quesito non poteva andare risolto che attraverso una sperimentazione sotto condizioni controllate, potendo noi disporre di un piccolo frigorifero (sistema Audiffren-Sungrün) con una cella a finestra, pensammo che valeva il merito di profittarne per recare un facile quanto rigoroso contributo in argomento.

Dando la preferenza a due delle varietà di grano le più coltivate nella plaga (Bassa Valle Padana), cioè a dire al Gentile Rosso e al Cologna, e fortemente contaminati i granelli con spore di *Tilletia* del 1921, si passò nel febbraio 1922 a studiare il comportamento di altrettanti lotti degli stessi semi sotto le seguenti distinte condizioni e in duplice serie:

1°) In letto di germinazione a 22-25 centigradi.

2°) " " a 10-12 " "

3°) " " a 2-4 " per venti giorni;

quindi a 22°-25°.

4°) In letto di germinazione per venti giorni a 2-4 centigradi; quindi a 10-12 per sette giorni; infine a 22-25.

5°) In letto di germinazione a 2-4 centigradi per 40 giorni; quindi al normale. (N.B. Alla fine della quinta settimana le piumette avevano raggiunto una lunghezza di oltre mezzo centimetro, e perciò dovevano ritenersi non più suscettibili di essere attaccate dal fungillo).

Tolte dai germinatoi per essere collocate, con le dovute cautele, in piena terra, le piantine attecchirono regolarmente.

Nessuna speciale osservazione degna di menzione durante le ulteriori fasi del ciclo.

Nel prospetto qui sotto si conglobano i risultati dei conteggi:

| | VARIETÀ | | | | | |
|--|-------------------|----------------|-----------|-------------|----------------|-----------|
| | « Gentile Rosso » | | | « Cologna » | | |
| | Spighe sane | Spighe cariate | % cariate | Spighe sane | Spighe cariate | % cariate |
| 1°) Germinazione a 22°-25° | 604 | 0 | 0.0 | 953 | 13 | 1.4 |
| 2°) Germinazione a 10°-12° | 940 | 143 | 13.2 | 565 | 366 | 39.3 |
| 3°) Germinazione a 2°-4° per venti giorni quindi a 22°-25° | 247 | 0 | 0.0 | 521 | 0 | 0.0 |
| 4°) Permanenza a 2°-4° per venti giorni, quindi a 10°-12° per sette giorni, infine a 22°-25° | 349 | 86 | 19.7 | 377 | 122 | 24.4 |
| 5°) Permanenza a 2°-4° per quaranta giorni, quindi al normale | 235 | 0 | 0.0 | 513 | 10 | 1.9 |

Si rileva tra l'altro, dall'esame delle cifre, come le due varietà in esperimento, a parità di condizioni, abbiano reagito in modo sensibilmente diverso agli attacchi del fungio.

CONCLUSIONI. — *Risulta sperimentalmente accertato che se le primissime fasi di sviluppo della pianta sono accompagnate da decorsi a temperature oscillanti tra due e quattro centigradi, il frumento sfugge all'attacco della carie, così come quando la germinazione dei granelli ha luogo a temperature tra i 22 e 25 centigradi. Ovvio è, comunque, che non potendosi in applicazione prevedere l'andamento stagionale dopo le semine, convenga sempre prudenzialmente effettuare un regolare trattamento o concia della semente.*

LAVORI CITATI

v. Tubenl K., *Studien über die Brandkrankheiten des Getreides und ihre Bekämpfung*. Arbeiten aus der biologischen Abteilung für Landw. und Forstwirtschaft, II Bd. (1902), pag. 323.

Hecke L., *Der Einfluss von Sorte und Temperatur auf den Steinbrandbefall*. Zeitschrift für das Landw. Versuchswesen Oest., XII (1909), n. 2, pag. 59.

Müller H. C., Molz E. und Morgenthaler O., *Ueber Brandbekämpfung und den Einfluss der Bestellzeit beim Sommerweizen auf dessen Ertrag und Gesundheit*. Die landwirtschaftlichen Versuchs-Stationen, Bd. LXXXIII (1913), Heft 3-4, pag. 211.

Müller H. C. und Molz E., *Ueber den Steinbrand des Weizens. Einfluss der Saatzeit auf den Steinbrandbefall beim Winter- und Sommerweizen*. Fühling's Landwirtschaftliche Zeitung, LXIII (1914), Heft 6, pag. 211.

Jones L. R., *Soil temperatures as a factor in Phytopathology*. The Plant World, XX (1917), n. 8, pag. 232.

Heuser W., *Versuche über den Einfluss äusserer Bedingungen auf die Stärke des Steinbrandbefalles des Weizens*. Fühling's Landw. Zeitung, LXXI (1922), Heft 5-6, pag. 81.

Johnston C. O., *Wheat smut investigations, in Kansas. Report 1920-21. Abstract, in Phytopathology*, XIII, 1923, N. 1, p. 36.

Biologia. — *Ulteriori ricerche sul Radiozoum lobatum Ming.* ⁽¹⁾. Nota della dott. G. ZANONI, presentata dal Socio B. GRASSI.

Accennavo nella precedente Nota alla zona centrale di protoplasma nella cellula del *Radiozoum* dove deve svolgersi la principale attività metabolica dell'organismo.

Ma in tale zona è ancora interessante un'altra formazione che, per la grandissima percentuale di individui in cui è sicuramente riscontrabile, come per lo sviluppo che in questi assume deve considerarsi quale fattore senza dubbio importante nella biologia dell'organismo. Si tratta di minuti elementi, quasi sempre numerosissimi, in forma di bastoncini diritti o leggermente

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel R. Istituto di Biologia marina in Messina diretto dal prof. L. Sanzo.

ricurvi, più grossolani e intensamente colorabili gli uni, più sottili e tenni gli altri, alcuni poi con forme tipiche di cilindretto; elementi che si addensano prevalentemente in questa zona per diradarsi verso la periferia nelle trabecole della zona alveolare, mancando poi sempre nel cordone e nella cuffia fibrillare. Ciascuno è per lo più circondato di un alone chiaro o vacuolo, sì che negli individui in cui si presentano particolarmente numerosi il protoplasma ne sembra quasi crivellato. Circa la loro natura è difficile esprimersi. Dai mitocondri ordinari, quali ci sono noti dai metazoi come dagli altri protozoi, essi si differenziano sia per il loro aspetto che per la resistenza ad alcuni fissativi contenenti acido acetico (Zenker, Schaudinn), e per certi caratteri di colorabilità, sì che dovendoli considerare come tali occorrerebbe attribuire ad essi proprietà fisico-chimiche alquanto divergenti dal tipo comune.

La forma invece suggerirebbe piuttosto l'ipotesi di microorganismi, ipotesi convalidata sopra tutto dal fatto che in alcuni casi ho potuto vedere in esemplari viventi elementi morfologicamente identici, dotati di movimento proprio, duraturi anche dopo la morte del protoplasma che li conteneva. È però da notare che essi o non si colorano affatto o solo debolmente con le sostanze coloranti nucleari, circostanza del resto già notata per alcuni blastomiceti simbiotici (Reichenow); il che potrebbe però solo eventualmente spiegarsi con scarsità estrema di sostanza cromatica ovvero con condizioni speciali di chimismo, dipendentemente sia dal peculiare ambiente sia anche da reazione da parte dell'ospite.

Certo, qualora si potesse con sicurezza attribuire a tali elementi il valore di organismi viventi, la loro alta frequenza in individui che appaiono d'altronde perfettamente sani, e in una forma nella quale non è poi dimostrabile mai traccia di materiale nutritizio potrebbe avere un evidente significato biologico, quale del resto scaturisce dai sempre più numerosi esempi di simbiosi più o meno unilaterale di cui alcuni ci sono noti anche fra i protozoi.

Come ho già accennato il *Radiozoum lobatum* è stato dal Mingazzini aseritto al gruppo dei *Cistoflagellati*. In realtà, l'osservazione di numerosi esemplari non mi permette di confermare l'asserita presenza di un flagello, unico elemento che possa giustificare una tale attribuzione.

Qualche anno dopo la Nota del Mingazzini, il Borgert descriveva ⁽¹⁾, proveniente dall'Atlantico tra i Protozoi della Plankton-expedition, insieme con alcune altre forme ad organizzazione consimile, una, che le figure e i dati da esso riportati mi persuadono doversi identificare col *Radiozoum*, e col nome di *Lohocella proteus* l'ascriveva alle *Tripileae*.

Esistono in realtà tra il *Radiozoum* e la capsula centrale di questi *Radiolari* e precisamente di alcuni generi dei *Medusettidi*, anche oltre alle

(1) Borgert, Arch. f. Protistenkunde. 1907.

semplici convergenze di adattamento, interessanti e suggestive somiglianze, dal tipico cestello più sopra descritto che ripete il disegno e la struttura dell'astropilo, alla posizione e natura del nucleo con trabecole e cordoni di sostanza cromatica e piccoli caratteristici cumuli granulari, e in fine alle numerose inclusioni concrezionari del protoplasma. Di tali *Radiolari* il *Radiosoum* non rappresenterebbe che la capsula isolata; e se, quale si riscontra sempre nel plancton, è effettivamente da ritenersi come una forma integra, esso costituirebbe un tipico interessante esempio delle profonde modificazioni portate dall'adattamento nell'organizzazione primitiva di un tipo morfologico, in quanto la capsula centrale, privata di qualsiasi traccia di scheletro e di protoplasma periferico sarebbe assurda per tal via alla dignità di un organismo indipendente, modificando la funzione di alcuni suoi organi (l'astropilo con l'aggiunta della zona radiale più esterna si sarebbe trasformato in un organo di sostegno, in cui non sembra più visibile alcuna apertura) o acquistandone di nuovi (differenziazione fibrillare del protoplasma), in relazione alle nuove esigenze di vita.

Una più accurata osservazione ci persuade anzi che in tale trasformazione il *Radiosoum* non rappresenterebbe che il termine ultimo di una serie che si vede nettamente delinearsi fra i vari rappresentanti della famiglia dei *Medusettidi*, serie lungo la quale si passa per una progressiva riduzione dello scheletro e del protoplasma esterno e un parallelo ampliarsi della capsula centrale, trasformantesi attraverso vacuolizzazione del protoplasma e formazione di gelatina in un'ampia « Schiwimmlase », dal tipo di organizzazione più proprio alle forme planctoniche degli strati profondi (come caratteristicamente tutte le *Tripileae*) al tipo proprio piuttosto alle forme più superficiali (*Collozoum*, *Talassicolla*; 1° strato di Haecker), prevalendo nelle prime meccanismi di sospensione per ampliamento della superficie attraverso disposizioni scheletriche ecc., nelle seconde meccanismi di galleggiamento per diminuzione del peso specifico mediante formazione di gelatina (imbibizione di acqua) vacuolizzazione e comparsa di secreti oleosi. Tali concetti tuttavia — pur suffragati dai dati anatomici più sopra espressi e avvalorati indirettamente dal fatto che nessuna altra più soddisfacente posizione sistematica potrebbe darsi a tale enigmatico organismo — devono naturalmente aver la loro riprova e conferma nella conoscenza degli stadî di sviluppo che ci possono ripetere le primitive connessioni filogenetiche; stadî che purtroppo finora nè ho potuto pescare nel plancton, nè ottenere in laboratorio, e saranno ancora l'oggetto delle mie ulteriori ricerche.

Patologia. — *Sulla natura clinica del principio attivo nella vaccinoterapia* ⁽¹⁾. Nota del prof. E. CENTANNI, presentata dal Corrisp. LOMONACO.

Che la funzione dei vaccini impiegati come curativi — vaccinoterapia — si svolga totalmente distinta da quella dei vaccini impiegati come preventivi — vaccinoprofilassi —, risulta da molteplici caratteristiche, di cui tre fondamentali:

1°) che il vaccino riesce ad influire sulla malattia nel pieno del suo decorso;

2°) che l'azione risolutiva si svolge quasi immediatamente dopo la iniezione;

3°) che il vaccino preparato con un germe vale, entro certi limiti, anche per infezioni da germi diversi.

L'esistenza di una immunità a sè poggiata su queste basi, in contrasto con la sierologica, trovò la sua prima affermazione negli studi del Centanni (1895), il quale, cercando di ripetere nelle infezioni sperimentali la caduta critica della polmonite crupale mediante un vaccino che imitasse il più davvicino il processo del focolaio epatizzato — pneumococco autolizzato in mezzo riccamente leucocitario —, trovò che tal materiale non solo proteggeva, ma anche troncava nettamente infezioni in pieno sviluppo; riusciva inoltre attivo contro infezioni e veleni diversi. Come sigillo di individualizzazione diè alla nuova forma il nome di *Immunità stomogene* ⁽²⁾.

Definitivo riconoscimento nella scienza questa immunità ha acquistato col recente risorgere (1915), pei lavori fondamentali di R. Kraus, Ishikawa, R. Schmidt, Lüdke, Weichardt, seguiti da infinito numero di altri, sotto la forma di Proteino- e Vaccinoterapia aspecifica, la quale, trasportando le prove sull'uomo, ha reso indiscusso di questa pratica: 1° il valore terapeutico, che cioè in malattie a florido sviluppo, particolarmente nel tifo, mediante tal genere di iniezione si riesce, in una forte proporzione di casi, a portare, anche nel giro di 6-8 ore, la malattia a risoluzione definitiva; 2° le caratteristiche biologiche, rappresentate da una serie ben definita di modificazioni, nel sangue e negli organi, che accompagnano lo svolgersi della risoluzione stessa.

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Patologia generale della R. Università di Modena.

⁽²⁾ E. Centanni *Les stomoosines, nouveaux produits immunisants*, Arch. ital. de Biologie, 1897.

Assicurati così i fatti e illustrata la parte, diremo, estrinsecativa della reazione, in queste modificazioni biologiche e terapeutiche, gli sperimentatori hanno rivolto i loro sforzi ai quesiti più intimi: quale è il principio attivo e come esso opera sopra l'organismo.

La ricerca sul principio attivo fu aperta dal lavoro del Centanni⁽¹⁾: *La depurazione dei vaccini a scopo curativo* (1896), la quale, proseguita attraverso tentativi, non sostenuti, anzi contrastati dalla comune corrente immunitaria, è arrivata a ridurre il principio terapeutico ad un prodotto abiuretico di grande concentrazione e potenzialità, quale è quello fin dal 1915 entrato nella pratica.

* * *

Esponiamo in particolare il procedimento seguito per la depurazione del vaccino antiftico, siccome quello di meglio accertata efficacia e di più controllabile potenzialità sopra la infezione umana.

Patine batteriche, sviluppate per due giorni sull'agar comune, vengono sottoposte a rapidi e ripetuti lavaggi alla centrifuga, a fine di allontanarne ogni aderenza di terreno di coltura. Riuscirebbe pure a questo intento il praticare la coltura in terreno apteico (liquido di Ushinsky e simili); ma sembra preferibile il metodo adottato, che non mette in condizioni troppo artificiali la vita del germe e quindi il suo ricambio.

La patina viene emulsionata in acqua distillata e lasciata al termostato per dieci giorni. A questo punto, mediante filtrazione per candela, si separano dai batteri i prodotti diffusi, e il liquido, concentrato a bassa temperatura fino a consistenza sciropposa, viene sottoposto a precipitazione in alcool e il precipitato lavato in etere. La parte di questo che si ridiscioglie in acqua, messa a dializzare attraverso membrana animale, lascia, dopo due giorni, diffondere tutta la sostanza attiva nel liquido esterno, che, concentrato a bassa temperatura, viene impiegato per le analisi.

Questo procedimento segue nelle sue linee essenziali quello introdotto dal Centanni⁽²⁾ per l'isolamento della pirotoossina o veleno febbrile, dove fu per la prima volta stabilito il *carattere abiuretico* di questo genere di prodotti a proprietà reattiva. Di particolare è il dover evitare in questa preparazione l'alta temperatura, che danneggia in grado considerevole il potere terapeutico.

Data la attività sotto il più esiguo volume propria del principio attivo, allo scopo di raggiungere una sufficiente sensibilità alle analisi viene impie-

(1) E. Centanni, *La depurazione dei vaccini a scopo curativo*. Il Policlinico, sezione medica, 1896.

(2) E. Centanni, *Untersuchungen über das Infektionsfieber. I Das Fiebergift der Bakterien*. Deut. med. Woch. n. 44 e 45. 1893. La Rif. medica, 1893.

gata per le prove una dose considerevole, di materiale, circa 500-1000 dosi terapeutiche.

1°) *Reazioni precipitanti:*

Bollitura in soluzione neutra o leggermente acida: nessun precipitato.

Saturazione con solfato di ammonio: nessun precipitato.

Ferrocianuro di potassio e acido acetico: nessun precipitato.

Soluzione di tannino: ricco precipitato.

Soluzione di acido fosfotungstico: opalescenza.

Alcool forte: precipitato abbondante.

2°) *Reazioni colorate:*

Reazione del biuret: negativa.

Reazione del Millon: negativa.

Reazione alla ninidrina: accenno di bleu.

3°) *Agenti decomponenti:*

Breve ebollizione: resiste in parte.

Digestione peptica e triptica: viene inattivata.

Dialisi: passa con media rapidità.

Etere, cloroformio: non disciolgono, nè inattivano.

Come carattere fondamentale risulta che il principio attivo della vacci-noterapia, la stomosina, come noi l'abbiamo chiamata, non è, nè proteina nativa e neanche fra i primi prodotti di scissione, albumosa e peptone, data l'assenza della reazione del biuret. Probabilmente rientra fra i polipeptidi inferiori, non già fra i semplici amino-acidi, perchè questi non sono ulteriormente scissi dai fermenti digestivi.

*
* *

Nelle ricerche, a cui con simile intento si sono dati altri sperimentatori, il carattere abiuretico trova la conferma per principî di analoghe proprietà, quattro da citare in particolare:

1°) Il Weichardt⁽¹⁾ difende il concetto che la protei-noterapia agisca col meccanismo della "Protoplasmaaktivierung", e che gli agenti sieno rappresentati da prodotti di scissione non troppo bassa delle proteine. In conformità è riuscito ad estrarre dai tessuti un principio che agisce da *eccitante sulle attività* dei batteri e dei tessuti, principio risultato appunto di natura abiuretica.

2°) Lo Heilner⁽²⁾, seguendo per la preparazione dei materiali protei-noterapici il criterio della specificità, ne fa l'estrazione dall'organo eguale

(1) W. Weichardt, *Leistungssteigerung als Grundl. d. Proteinkörpertherapie*. Ergebn. d. Hyg., Bakt., Immun. ecc., Bd. 5, 1922.

(2) E. Heilner, *Affinitätskrankheiten und lokaler Gewebsschutz (Affinitätschutz)*. Jahresh. f. ärzt. Fortbildung, 1921. Münch. med. Woch., n. 15, 1921.

a quello che deve esser curato: così la *Sanarthrit* dalle cartilagini articolari. Questo genere di preparati è pure esso abiuretico e nondimeno sviluppa un potere curativo e una reazione perfettamente corrispondente a quella delle proteine intere.

3º) La *tubercolina*, la cui azione ha tutte le caratteristiche per rientrare nell'orbita di queste reazioni, è stata dalle ricerche di Löwenstein e Pick⁽¹⁾, confermate di recente da quelle dello Ziemer, riconosciuta come prodotto abiuretico.

4º) Al *peptone* compete, come si sa, per le prove specialmente del Nolf, la capacità di influenzare beneficamente le infezioni col quadro della reazione tipica. Orbene, Pick e Spiro⁽²⁾ hanno dimostrato che l'azione propria del peptone non è legata alla presenza di peptone e albumosa, ma ad un corpo ancora ignoto a sè — quindi abiuretico — che essi hanno chiamato « peptozima ».

Aggiungeremo come in questi ultimi tempi si sia cercato di identificare il principio attivo dell'anafilassi, e insieme anche della proteinoterapia, del riassorbimento di tessuti offesi e del peptone, con un corpo definito, la *istamina*, che si genera per decarbonizzazione della istidina. Sebbene la identificazione non risulti completa, il tentativo indica nondimeno che per questo genere di effetti si è sempre nell'orbita chimica che discutiamo.

In conclusione, materiali a carattere reattivo di cinque fra le più diverse sorgenti e preparazioni, si trovano tutti a collimare nell'essere rappresentati da piccole frazioni della grossa molecola proteica col carattere abiuretico. Il riconoscimento di questa proprietà nei vaccini curativi apre l'adito ad alcune deduzioni importanti.

In primo posto, riguardo alla *terminologia* della nuova pratica terapeutica, non è esatto il termine di Proteinoterapia (Schmidt), non rappresentando il principio attivo una proteina; neanche esatto è il termine di Colloidoterapia (Luitlen, Widal), essendo pure escluso il carattere colloide; preferibile il nostro termine di Stomoterapia, terapia tempratrice, che trova ora l'assenso nel concetto analogo incluso dal Weichardt nella « Protoplasmaaktivierung ».

Di maggior valore è una deduzione pratica. Il principio, così liberato da mescolanza di proteine, va esente dalla *capacità anafilattizzante*, la quale, sappiamo, cessa col subentrare della fase peptonica: superiorità decisa sui preparati proteinoterapici greggi siero, latte, ecc. — che tale capacità rende pericolosi nelle cure continuate e in particolare per iniezione endovenosa.

(1) Löwenstein u. Pick, *Beiträge zur Kenntnis des Tuberkulins*. Bioch. Zeitschr., Bd. 31, S. 142, 1911.

(2) Pick u. Spiro, *Ueber die Peptonwirkung*. Zeitschr. f. physiol. Chemie, Bd. 31, S. 235, 1900-1901.

*
* *

Vediamo ora qual'è la *dose del preparato* sufficiente all'effetto curativo. Un criterio ci viene fornito dal sapere per le prove del Micheli e del Moreschi che pel tifo basta $\frac{1}{500}$ e financo $\frac{1}{1000}$ di ansa di 2 mgr. di patina batterica da cui sottratta la parte acquosa e considerando che non tutto il corpo batterico è materiale attivo, si arriva certamente vicino a $\frac{1}{\text{bilione}}$ di grammo.

Dato che dose sì impercettibile, introdotta in un organismo del volume dell'uomo e così profondamente compenetrato di batteri e veleni e offeso in tutti gli organi, siccome è il tifoso, vale ad imprimere una scossa tale che in poco d'ora lo risana, è necessario ammettere che tal genere di agenti porti condensata, sotto il minimo volume, la più poderosa energia. Ciò induce a pensare che entro la molecola proteica esistano dei *centri o nuclei energetici*, minuti e potentissimi, che animano forse il resto della molecola: nuclei in apparenza inerti finchè in presenza di nuclei estranei, ma, venuti ad incontrarsi col nucleo corrispondente, capaci di sprigionare scariche di conseguenze biologiche imponenti.

Qui si affaccia un quesito singolare. Come mai l'organismo del tifoso che *alberga in sé*, nel sangue e nei focolai, miriadi di bacilli, non riesce a guarire che lentamente e attraverso grave rischio; laddove quel bilione degli stessi bacilli, *introdotto dall'esterno*, vale a sprigionare d'improvviso una spinta alla piena salute? È la domanda stessa che si può ripetere per la tubercolina: l'organismo tubercoloso è inondato di prodotti bacillari, eppure $\frac{1}{100}$ di mgr. — e come principio attivo con le debite deduzioni ancor molto meno — di estratto di quegli stessi bacilli suscita una reazione che può arrivare ad esser mortale.

La spiegazione non può essere certamente altra, se non che la chimica che svolge il batterio entro l'organismo è fondamentalmente diversa da quella che svolge nelle colture e si genera col loro trattamento. Il fatto acquista ancor più significato, conoscendosi altri esempi di simile antagonismo per uno stesso materiale, quando fa parte dell'ambiente vivo e quando si separa da esso: tali, l'azione reattiva che acquista il sangue coagulando, quella propria del latte e dei versamenti iniettati nello stesso soggetto, e particolarmente la trasformazione tossica che subisce il siero nel trattamento con vari colloidi per la preparazione della cosiddetta anafilatossina in vitro.

Questa vicenda di contrarie trasformazioni induce ad ammettere che i nuclei energetici sieno capaci di opposta polarità, in senso non solo fisico, ma insieme chimico specifico; e che cause che a noi paiono leggere, ma in realtà biologicamente forti, quali l'estrazione e i trattamenti fuori dell'orga-

nismo, e in ogni caso il corso regressivo delle reazioni post mortali, valgono a trasformare l'un polo nell'opposto, nel suo antipodo. Ed allora si comprende come questo antipodo, incontrandosi col suo omologo nell'organismo, possa dar luogo ad una scarica così subitanea e intensa.

Tutti i fenomeni a base reattiva sarebbero quindi da interpretarsi sulla base di *inversione di polarità*. Si apre con questo un campo di ricerca di sommo interesse: sia nel rapporto biologico, per illustrare in qual modo e con quali agenti questa inversione venga promossa; sin dal lato terapeutico, per trasformare i prodotti nocivi nei corrispondenti agenti di cura.

Patologia. — *Sul processo eritrocateretico negli uccelli (piccioni) con speciale riguardo alle relazioni tra eritrocateresi splenica ed epatica* ⁽¹⁾. Nota del dott. LIBORIO GALIFI, presentata dal Socio E. MARCHIAFAVA.

Per consiglio del prof. Dionisi intrapresi due serie di ricerche sperimentali cogli scopi seguenti.

I. Con un primo gruppo di ricerche cercai di determinare, con l'analisi istologica, le particolarità del processo eritrocateretico compiuto dagli elementi del reticolo della milza e del fegato in piccioni anemizzati con pirodina, alcuni dei quali furono precedentemente smilzati.

II. Il secondo gruppo di ricerche fu fatto con lo scopo di vedere i rapporti tra alterazioni del fegato e della milza, provocando una alterazione grave del fegato a mezzo della legatura del dotto coledoco e studiando successivamente le modificazioni della milza, sia in piccioni con semplice legatura del coledoco, sia in piccioni così trattati ed anemizzati.

I^a SERIE.

I risultati del primo gruppo di ricerche collimano con quelli ottenuti da Aschoff su piccioni avvelenati con idrogeno arsenicale e con quelli ottenuti dal Lephene in ratti smilzati. Difatti:

1°) Nei piccioni sacrificati o morti in seguito a semplice anemia sperimentale, si ottenne costantemente intenso colorito itterico della cutè e delle congiuntive, ed all'esame microscopico si rilevò una evidente azione emocateretica delle cellule di Kupffer, che in tutti i campi dei preparati apparivano enormemente aumentate di volume, sino a superare la grandezza delle cellule epatiche e ripiene di residui di globuli rossi. Altra constatazione di non minore interesse era l'aspetto emolitico della milza caratterizzato dalla

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto d'Anatomia patologica della R. Università di Palermo diretto dal prof. Antonio Dionisi.

presenza di numerose cellule globulifere, dal comportamento analogo a quello delle cellule di Kupffer.

I risultati di questa esperienza suggerirono di vedere quale sarebbe il comportamento delle cellule stellate di Kupffer in seguito a soppressione dell'attività emolitica della milza.

2°) A tale riguardo i piccioni anemizzati con pirodina 4 giorni dopo la distruzione della milza col termocauterio, perirono dopo alcuni giorni, in pieno corso di itterizia, dimostrando, contrariamente a quello che avviene nei mammiferi, poca resistenza a tali pratiche sperimentali.

L'esame dei preparati mise in evidenza l'esagerata attività fagocitaria delle cellule di Kupffer sugli elementi del sangue che non avevano subito gli effetti della attività splenica.

3°) I piccioni nei quali fu legato il dotto coledoco per determinare alterazioni da stasi biliare nel fegato, e fu contemporaneamente distrutta la milza col termocauterio, dopo una diecina di giorni in media, morirono senza presentare alcun accenno di colorito itterico. L'esame istologico dimostrò gravi alterazioni nel fegato a carico delle cellule epatiche e delle cellule di Kupffer, le quali ultime erano appena riconoscibili: il che spiega che la formazione della bile sia stata arrestata in massima parte per tali alterazioni.

II^a SERIE.

Stabilito così che le cellule di Kupffer pigliano parte considerevole nella eritrocateresi, che possono esercitare funzione compensatoria dopo la sottrazione della milza e che, se esse sono danneggiate per la legatura del coledoco, non si riesce a riprodurre l'ittero nei piccioni precedentemente smilzati, cercai con un altro gruppo di esperienze di indagare il loro comportamento nella semplice legatura del dotto coledoco, e quale modificazione la milza subisse in seguito alle alterazioni indotte nel fegato per la stasi biliare da legatura del coledoco.

Era lecito supporre che essendo le cellule di Kupffer impegnate nella fagocitosi del pigmento biliare, non eliminabile per la legatura del coledoco, venisse limitata la loro azione emocateretica e conseguentemente nuovo materiale bilinogeno, il fegato non potesse più utilizzare.

1°) L'ittero, difatti, che nei primi giorni era molto evidente negli animali sottoposti a semplice legatura del coledoco, andò sempre più regredendo e quasi scomparve in un piccione sopravvissuto di più. Il reperto istologico, oltre a far rilevare gravi alterazioni a carico del fegato per la stasi biliare, mise principalmente in evidenza una nuova particolarità, la trasformazione, endotelioide della milza, che potrebbe esser considerata come causa della limitazione della sua funzione emolitica.

Questa importante modificazione della milza potrebbe spiegare il decorso dell'ittero da stasi biliare che andò gradatamente diminuendo. Degna di non poco interesse è la influenza delle alterazioni del fegato sulle modifica-

zioni della milza, il che può servire di eccitamento a nuove indagini sulla malattia di Gaucher, la cui etiologia e specialmente i cui rapporti con le alterazioni del fegato, sono oscuri.

Ottenuta la trasformazione endotelioide della milza, con la legatura del coledoco, parve opportuno di provare, se questa modificazione la milza subisse anche quando avesse assunto funzione emolitica esagerata a mezzo del trattamento degli animali con veleni emolitici.

2°) A tal proposito indussi nei piccioni l'anemia sperimentale fino ad evidente manifestazione d'ittero e poi eseguii la legatura del dotto coledoco. Il colorito itterico della cute incominciò a regredire dopo cinque giorni circa dalla legatura del coledoco, fino a quasi completa scomparsa. L'esame istologico fece constatare che la milza anche in condizione di esagerata attività emolitica, subisce la trasformazione endotelioide in seguito alle alterazioni indotte nel fegato per la legatura del coledoco. Il graduale affievolimento della tinta itterica, può mettersi anche in questo caso in rapporto con la anormale condizione della milza.

Visto che con la trasformazione endotelioide ottenuta costantemente nelle ultime due esperienze, la milza veniva limitata nella sua attività emolitica, restava da indagare se, queste modificazioni fossero permanenti ovvero transitorie; se, in altri termini, la milza endotelioide fosse capace di riacquistare per intero la sua proprietà emocateretica.

3°) A tal uopo sottoposi ad anemia sperimentale alcuni animali cui quattro giorni prima avevo praticata la legatura del coledoco. L'ittero che si era già manifestato in seguito a questa legatura, andò sensibilmente intensificandosi con le iniezioni di pirodina. Il reperto microscopico mise poi in evidenza le cellule di Kupffer in piena attività fagocitaria e la presenza di numerose cellule globulifere nella milza, che pur aveva subito in parte la trasformazione endotelioide.

Questo dato di fatto fa pensare che la milza endotelioide riacquisti la sua funzione emolitica in seguito allo stimolo di una intensa anemia, fornendo il materiale alle cellule di Kupffer, le quali riprendono azione emocateretica, pur avendo subito alterazioni per la legatura del coledoco.

Dai risultati dei due gruppi di esperienze si può quindi concludere:

1° che rimane confermata l'azione eritrocateretica delle cellule di Kupfer;

2° che alle alterazioni indotte nel fegato con la legatura del coledoco si associa la trasformazione endotelioide della milza, che limita l'eritrocateresi splenica ordinaria, ma che può ripristinarsi col trattamento con veleni emolitici.

G. C.
